理学研究科博士前期課程
(物理学専攻・宇宙地球科学専攻)

入学試験問題

物理学

令和 5 年 8 月 29 日

問題 1 から問題 4 までのすべての問題に解答せよ。答案用紙は問題ごとに１枚とし、それぞれに問題番号・受験番号・氏名を書くこと。

問題 1

I. 図 1 のように質量 m_1、m_2 の質点 1、2 が長さ l の糸でつながれ、半径 a の円盤状滑車に掛けられた状態を考える。鉛直下向きに y 軸をとり、滑車の中心を原点 O として質点 1、2 の位置を y_1、y_2 とする。質点 1、2 は鉛直方向にのみ運動するとし、重力加速度を g とする。滑車は天井に固定されており、滑車と糸の質量は無視でき、滑車の回転軸の摩擦は無視できるものとする。また、糸と滑車はすべらないものとし、糸は十分に長くたわまないものとする。以下、ドット $(\dot{\ })$ は時間微分を表す。

(1) 仮に糸が存在しなかった場合、この系のラグランジアン L_1 を y_1、y_2、$\dot{y}_1$、$\dot{y}_2$ の関数として求めよ。

(2) 以下、糸がある場合について考える。糸の長さが一定であるということを踏まえ、y_1 と y_2 の間に成り立つ拘束条件を $C_1(y_1, y_2) = 0$ という形で表せ。

(3) **(2)** の拘束条件を考慮し、ラグランジアンを $L_1' = L_1 + \lambda C_1$（λ は未定乗数）とし、λ を用いて y_1、y_2 に関する運動方程式を導け。このようにすることで、拘束条件を考慮した運動方程式が導かれることが知られている（ラグランジュの未定乗数法）。

(4) 質点 1 の加速度を λ を使わずに表せ。
（ヒント：拘束条件から質点 1 と質点 2 の加速度の関係がわかる。）

(5) λ を求め、物理的意味を述べよ。

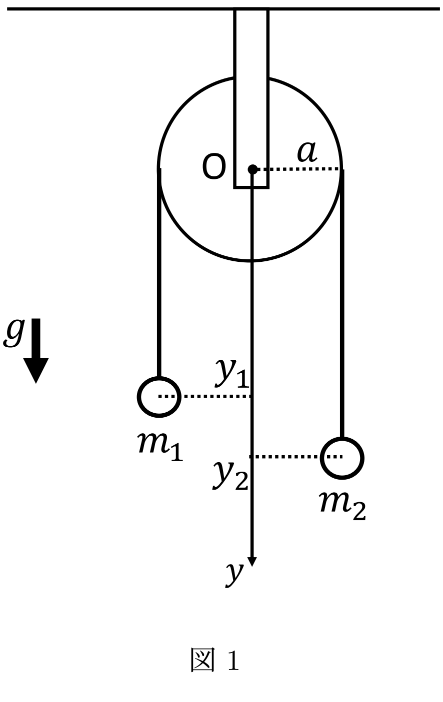

図 1

II. 次に、滑車が一様な質量面密度の円盤とし、質量 M を持つ場合について考える。このときは滑車の回転運動についても考慮する必要が出てくる。図 2 のように滑車の中心を原点 O として、質点 1、2 の位置を y_1、y_2 とし、回転軸まわりの滑車の回転角を θ とする。$y_1 = 0$ のとき $\theta = 0$ とする。

(6) 回転軸まわりの滑車の慣性モーメントが $\dfrac{1}{2}Ma^2$ であることを示せ。

(7) 滑車の運動エネルギーを $\dot{\theta}$ の関数として求めよ。

(8) 糸の長さが一定である条件は **(2)** と同様であるため、$C_1(y_1, y_2) = 0$ という拘束条件は成り立つ。これとは別に、糸と滑車がすべらないことから導かれる y_1 と θ の間に成り立つ拘束条件がある。この拘束条件を $C_2(y_1, \theta) = 0$ という形で表せ。

(9) **(8)** の 2 つの拘束条件を考慮し、ラグランジアンを $L_2' = L_2 + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$（$\lambda_1$、$\lambda_2$ は未定乗数）とし、λ_1、λ_2 を用いて y_1、y_2、θ に関する運動方程式を導け。ただし、L_2 は拘束条件がないときのこの系のラグランジアンを表す。

(10) 質点 1 の加速度を λ_1、λ_2 を使わずに表せ。

(11) λ_1、λ_2 を求め、物理的意味を述べよ。

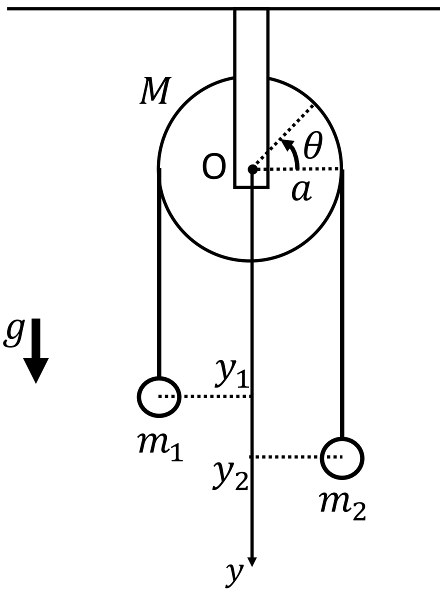

図 2

（計算用余白）

（計算用余白）
問題 2 は次ページから。

問題 2

多数の荷電粒子が存在する系を考える。電磁気力以外の力は無視できるとし、系内の粒子数は一定とする。荷電粒子は互いに電磁気力を及ぼしながら運動を行う。このとき電磁場と荷電粒子とのエネルギー授受について考える。

I. **(1)** 系全体での荷電粒子の運動エネルギーの時間変化を求めたい。まず、i 番目の粒子（電荷 q_i、質量 m_i）の運動方程式

$$m_i \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} = q_i \left(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}_i, t) + \boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_i, t) \right)$$

から、i 番目の粒子の運動エネルギー $K_i = m_i \boldsymbol{v}_i^2/2$ の時間変化を表す式

$$\frac{dK_i}{dt} = q_i \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}_i, t)$$

を導け。ただし、$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ は電場と磁束密度、$\boldsymbol{v}_i$ は i 番目の粒子の速度、$\boldsymbol{x}_i$ は i 番目の粒子の位置、t は時間である。

(2) **(1)** で導いた式の全粒子についての和をとることで、系内の全粒子の運動エネルギー $W = \sum_i K_i$ の時間変化を表す式

$$\frac{dW}{dt} = \int \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}, t) \; dV$$

を導け。$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}, t) = \sum_i q_i \boldsymbol{v}_i \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_i)$ は電流密度、δ はデルタ関数、$\sum_i$ は系内の全ての粒子について和をとることを表し、積分は系全体での体積積分を表す。

(3) マクスウェル方程式は次のように与えられる。

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

以下では、誘電率、透磁率は真空中と同じ定数 ε_0, μ_0 であるとする。ρ は電荷密度、$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B}/\mu_0$ は磁場、$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$ は電束密度である。マクスウェル方程式を使って、**(2)** で導いた系内の全粒子の運動エネルギーの時間変化に関して

$$\frac{dW}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\int u \, dV \right) + \int \nabla \cdot \boldsymbol{S} \, dV = 0 \qquad \text{(i)}$$

の形の式を導き、u と $\boldsymbol{S}$ を、$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ の関数として表せ。$\boldsymbol{S}$ はポインティングベクトルと呼ばれる。積分は系全体での体積積分を表す。任意のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ について成り立つ公式 $\nabla \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{a}) - \boldsymbol{a} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{b})$ を用いてよい。

(4) 式 (i) は、考えている系におけるエネルギー保存を表している。各項の物理的意味を説明せよ。

II. 電磁波のポインティングベクトルについて考える。$\rho = 0$, $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{0}$ とし、以下の問いに答えよ。

(5) 電磁波を真空中の平面波とし、電磁波の電場を $\boldsymbol{E} = E_0 \sin(\omega t - kz)\boldsymbol{e}_x$ と書く。ω と k は正の実数で $\omega/k = c$（c は光速）とする。このとき、真空中のマクスウェル方程式を満たす磁場 $\boldsymbol{H}$ を書き下せ。また、ω と k の関係を ε_0, μ_0 を用いて表せ。E_0 は定数とする。$\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ をそれぞれ x, y, z 方向の単位ベクトルとする。

(6) **(5)** の結果を **(3)** で導いた $\boldsymbol{S}$ の表式に代入して真空中の平面波のポインティングベクトル $\boldsymbol{S}$ を求めよ。求めた $\boldsymbol{S}$ を電磁波周期 $2\pi\omega^{-1}$ で時間平均することで、$\langle S \rangle$ と $\langle u \rangle$ が比例関係 $\langle S \rangle = \alpha \langle u \rangle$ にあることを示し、比例定数 α を求めよ。S はベクトル $\boldsymbol{S}$ の大きさ、ブラケット $\langle\ \rangle$ は電磁波周期での時間平均を表す。

III. 図 1 に示すような半径 a で無限に長い一様な円柱状の導線に、一定の電圧がかけられている。導線は有限な抵抗を持つとする。この導線の断面 A_1 と断面 A_2 の間の電位差は $\Delta\phi$ であり、断面 A_1 と断面 A_2 の間の導線内部および表面に一様かつ定常な電流が電流密度 $\boldsymbol{J} = J\boldsymbol{e}_z$ で流れているとする。このとき、断面 A_1 と断面 A_2 に囲まれた導線部におけるエネルギー保存を考える。ここでは円筒座標を考え、$\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_z$ をそれぞれ r, θ, z 方向の単位ベクトルとする。断面 A_1 と断面 A_2 の間の長さは L とする。また、導線は電気的に中性であると考え、$\rho = 0$ とする。荷電粒子にかかる磁場によるローレンツ力は無視できるとする。

(7) 断面 A_1 と断面 A_2 の間の領域の、導線表面 $r = a$ における電場 $\boldsymbol{E}$、磁場 $\boldsymbol{H}$ を求めよ。求めた $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ から導線表面におけるポインティングベクトル $\boldsymbol{S}$ を求め、$a, J, \Delta\phi, L$ と必要な単位ベクトルを使って表せ。

(8) **(7)** で求めたポインティングベクトルを用いて、エネルギー保存式 (i) の左辺第 3 項を計算せよ。計算する領域は、断面 A_1 と断面 A_2 に囲まれた長さ L の導線部とする。エネルギーが保存することから、計算した左辺第 3 項によるエネルギーの増減分は、他の項によって相殺されなければならない。どの項と相殺すると考えられるか、その物理的意味とともに答えよ。

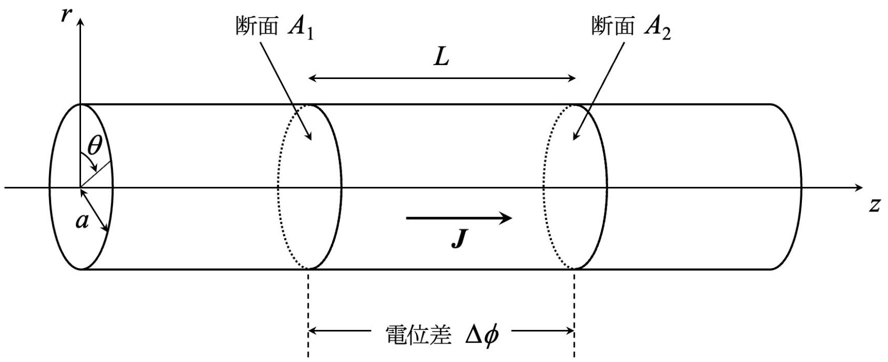

図 1

（計算用余白）

（計算用余白）
問題 3 は次ページから。

問題 3

図 1 のように xy 平面上の原点を中心とした半径 r の円周上になめらかに拘束された粒子の運動を考える。この粒子の位置を x 軸からの角度 ϕ によって表す。粒子の質量を m とする。

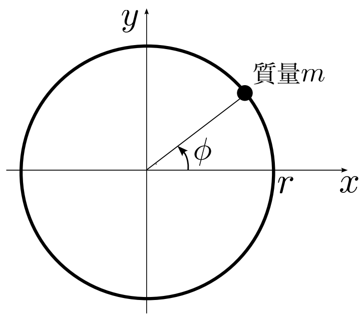

図 1

I. まず、この粒子の運動を古典力学で取り扱う。

(1) この粒子のラグランジアンを ϕ、$\dot{\phi}$ の関数として表せ。

(2) ϕ に共役な正準運動量 p_ϕ を求めよ。

(3) この粒子のハミルトニアンを

$$H = \frac{1}{2I}p_\phi^2$$

と表したときの定数 I を求めよ。

以後解答に I を用いて良い。

II. 次にこの粒子の運動を量子力学で取り扱う。量子力学の波動関数は ϕ の関数であり、ハミルトニアンは上の古典的なハミルトニアンから p_ϕ を $-i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}$ に置き換えることで得られるものとする。また規格化された波動関数 $f(\phi)$ とは、

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(\phi)|^2 d\phi = 1$$

を満たすものとする。

(4) この系のすべての規格化されたエネルギー固有関数とそのエネルギー固有値を求めよ。

III. 次に図 2 のように z 軸中心の円筒内部に一様に z 軸正の向きで磁束密度の大きさ B の磁場を加える。円筒の半径を ℓ とし、$\ell < r$ とする。粒子の電荷を $q > 0$ とする。

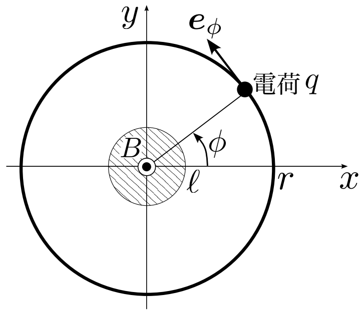

図 2

(5) 粒子がいる円周上で、円周の接線方向で ϕ が増える向きの単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_\phi$ とする。この円周上でのベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を ϕ によらない定数 a を用いて

$$\boldsymbol{A} = \frac{a}{r}\boldsymbol{e}_\phi$$

と表したとき、定数 a を求めよ。

(6) この系のハミルトニアンを求めよ。解答には a を用いてよい。なお、ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ が存在する場合のラグランジアンは **(1)** で求めたものに $q\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}$ の項を付け加えることで得られる。ここで $\boldsymbol{v}$ は粒子の速度である。

(7) この系のエネルギー固有値をすべて求めよ。解答には a を用いてよい。

(8) 磁束密度 B を 0 から徐々に増やしていく。最初に基底状態が縮退するときの a を求めよ。

IV. 次に磁場を切り、適当な静電場を加えることで、粒子に小さなポテンシャル $V(\phi)$ を与える。ただし V は

$$V(-\phi) = V(\phi)$$

を満たす ϕ の関数とする。また、演算子 P を、波動関数 $f(\phi)$ に対して

$$Pf(\phi) = f(-\phi)$$

となるものとして定義する。

(9) P がユニタリー演算子であることを示せ。

(10) P がハミルトニアンと交換することを示せ。

(11) V を加える前は第 1 励起状態は 2 重縮退していた。V を加えることにより、一般にはこの縮退は解ける。V を加えた後の 2 つのエネルギー固有値の差を摂動の 1 次の近似で求めよ。解答は V を含む積分の形で表せ。解答の符号は問わない。

（計算用余白）

（計算用余白）
問題 4 は次ページから。

問題 4

調和振動子に関する以下の問いに答えよ。ただしボルツマン定数を k_{B} とし、log は自然対数とする。

I. 独立な N 個の 1 次元調和振動子の系を考える。全ての調和振動子は共通の固有角振動数 ω を持つとする。このとき系の固有エネルギーは

$$E = \sum_{i=1}^{N} \left(n_i + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega$$

で与えられる。$n_i\,(i = 1, \ldots, N)$ は非負の整数であり、各調和振動子が取るエネルギー固有状態を表す。まずこの系をミクロカノニカルアンサンブルの考え方で扱ってみよう。

(1) $n_1 + n_2 + \cdots + n_N = M$ となる状態の数 $W(M)$（M は非負の整数）を求めよ。p 個の球を q 個の番号つきの箱に分配する場合の数は $(p+q-1)!/[p!(q-1)!]$ であることを用いて良い。

(2) M が E の関数であることに注意して、エントロピー S をエネルギー E の関数として求めよ。但し $M \gg 1$、$N \gg 1$ として、スターリングの公式

$$\log n! \approx n \log n - n \quad (n \gg 1)$$

を用いよ。また M, N に対して 1 は無視して良い。

(3) 関係 $1/T = \partial S/\partial E$ を用いて、温度 T を E の関数として求めよ。

II. 前問の調和振動子の系が温度 T の熱浴と熱平衡にあるとして、カノニカルアンサンブルの考え方で扱ってみよう。逆温度を $\beta = 1/(k_{\mathrm{B}}T)$ とする。**I** の結果を用いず、独立に解答すること。

(4) 1 個の調和振動子の分配関数 $Z_1(\beta)$ を求めよ。また $Z_1(\beta)$ を用いて系全体の分配関数 $Z(\beta)$ を表せ。

(5) エネルギーの期待値 E を求めよ。

(6) 比熱 $C = \partial E/\partial T$ を求めよ。また C の低温極限 $(T \to 0)$ と高温極限 $(T \to \infty)$ をそれぞれ求めよ。

(7) ヘルムホルツの自由エネルギー F、エントロピー S を求めよ。また、$k_{\mathrm{B}}T \gg \hbar\omega$ の範囲で $S \approx Nk_{\mathrm{B}} \log w(T)$ の形で表し、関数 $w(T)$ を求めよ。但し $1/T$ の高次の項を無視し、展開の最初の項のみを残せ。

III. 固体中の格子振動は、様々な固有角振動数を持つ独立な調和振動子の集合体として理解することができる。

(8) 固有角振動数が ω から $\omega + d\omega$ の間にある調和振動子の数が $g(\omega)d\omega$ であるとき、$g(\omega)$ を状態密度と呼ぶ。定数 A を用いて $g(\omega) = A\omega^2$ で与えられるとする。このとき系の比熱は T の何乗に比例するか。

(9) ある 3 次元の固体物質において、固有角振動数 ω と波数 $\boldsymbol{k}$ の関係が $\omega = Bk^n$ $(n > 0)$ であるような波動が存在したとする。但し B は定数、$k = |\boldsymbol{k}|$ である。この波動による比熱は T の何乗に比例するか。

（計算用余白）

（計算用余白）

（計算用余白）