# 理学研究科博士前期課程
# (物理学専攻・宇宙地球科学専攻)

# 入学試験問題

# 物理学

令和 3 年 8 月 30 日

問題 1 から問題 4 までのすべての問題に解答せよ。答案用紙は問題ごとに１枚とし、それぞれに問題番号・受験番号・氏名を書くこと。

## 問題 1

図 1 のように水平方向に $x$ 軸を、鉛直上向きに $y$ 軸をとり、台 A を $x$ 軸上においた。台 A は大きさの無視できる質点とみなしてよい。台 A から、質量 $M$、長さ $2a$ の太さが無視できる一様な棒をつり下げた。棒は台 A を中心に $xy$ 座標面内で、なめらかに回転することができる。空気抵抗は無視してよい。また、重力加速度の大きさは $g$ とする。以下の **I.** では台 A が原点 O に固定されている場合を考え、**II.** では台 A が $x$ 軸上をなめらかに動く場合を考える。

**I**. 台 A が原点 O に固定されている場合を考える。原点 O を通り $xy$ 座標面に垂直な軸のまわりの、棒の慣性モーメントを $I_{\mathrm{O}}$ とする。図 1 のように、はじめ棒は静止しており、大きさ $P$ の水平方向の力積を棒の重心に加えた。このとき、棒は変形しない。力積を加えると、図 2 のように棒は最大角 $\varphi_0$ ($\varphi_0 \ll 1$) まで振れた後に、微小角の振り子運動をした。

**(1)** 棒の慣性モーメント $I_{\mathrm{O}}$ を求めよ。

**(2)** 棒の振り子運動の角振動数を、$M$, $a$, $I_{\mathrm{O}}$, $g$ の中から必要なものを用いて表せ。また、振り子運動をしている棒の振れ角 $\varphi$ は非常に小さく、$\sin\varphi \approx \varphi$ としてよい。

**(3)** 棒の最大振れ角 $\varphi_0$ を、$M$, $a$, $I_{\mathrm{O}}$, $P$, $g$ の中から必要なものを用いて表せ。$\varphi_0$ は非常に小さいので、$\cos\varphi_0 \approx 1 - \dfrac{1}{2}\varphi_0^2$ を用いてもよい。

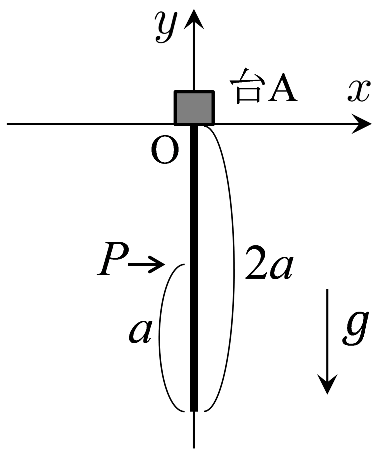


図 1

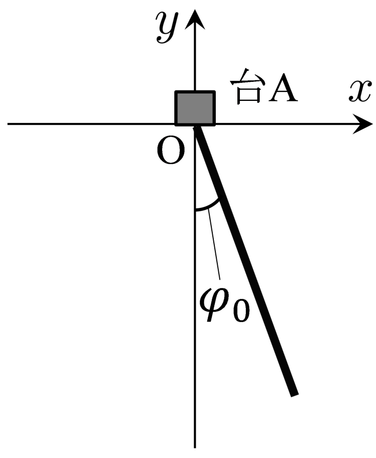


図 2

**II**. 質量 $m$ の台 A が $x$ 軸上をなめらかに動く場合を考える。図 3 のように、棒を振れ角 $\theta_0$ $(0 < \theta_0 \ll 1)$ まで手で持ち上げ、棒と台 A を静止させた。このとき、図 3 の $xy$ 座標面において、台 A の座標は $(0, 0)$ であった。時刻 $t = 0$ に静かに棒をはなすと、台 A は振動運動を、棒は微小角の振り子運動をした。図 4 は、ある時刻 $t$ での台 A と棒の運動の様子を示している。時刻 $t$ での台 A の座標を $(x, 0)$、棒の振れ角を $\theta$ とすると、棒の重心の座標は $(x', y')=(x + a\sin\theta, -a\cos\theta)$ と表される。棒の重心を通り $xy$ 座標面に垂直な軸のまわりの、棒の慣性モーメントを $I$ とする。以下の解答には $I$ を用いてもよい。また、$\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$, $\ddot{x} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$, $\dot{\theta} = \dfrac{d\theta}{dt}$, $\ddot{\theta} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$ とする。

**(4)** この台 A と棒からなる系の、運動エネルギー $T$ とポテンシャルエネルギー $U$ を、$M, m, a, I, g, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}$ の中から必要なものを用いて表せ。$y = 0$ をポテンシャルエネルギー $U$ の基準 $(U = 0)$ とする。ここでは、$\theta$ が微小量であることは考慮せず、$\theta$ に関する近似を用いずに答えよ。

**(5)** この棒の振り子運動の振れ角 $\theta$ は極めて小さいため、$\cos\theta \approx 1 - \dfrac{1}{2}\theta^2$ と近似してよい。また、$\theta, \dot{\theta}$ の 3 次以上の項と定数項を無視すると、台 A と棒からなる系のラグランジアン $L$ は次のようになる。

$$L = \boxed{\quad (\text{あ}) \quad}\dot{x}^2 + \boxed{\quad (\text{い}) \quad}\dot{\theta}^2 + \boxed{\quad (\text{う}) \quad}\dot{x}\dot{\theta} - \boxed{\quad (\text{え}) \quad}\theta^2$$

空欄 (あ)、(い)、(う)、(え) に入る数式を、$M, m, a, I, g$ の中から必要なものを用いて表せ。

**(6)** **(5)** のラグランジアン $L$ を用いて、$x, \theta$ に関するオイラー・ラグランジュ方程式を求めよ。

**(7)** 台 A の質量が $m \to \infty$ の場合、台 A の運動を簡潔に説明せよ。また、棒の振り子運動の角振動数を求めよ。

**(8)** 台 A の質量が $m = 0$ の場合、台 A と棒の運動を、棒の重心に着目し簡潔に説明せよ。また、棒の振り子運動の角振動数を求めよ。

**(9)** 台 A の質量 $m$ が 0 でない有限の値をとるとする。**(6)** の連立微分方程式を解き、初期条件を満たす $x$ と $\theta$ を求めよ。

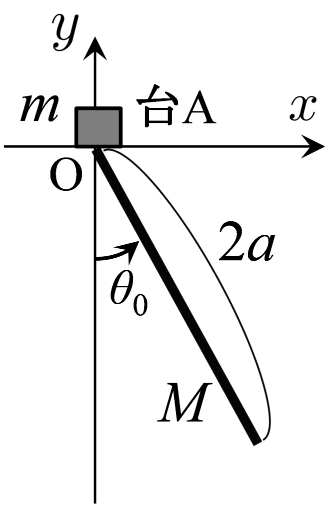


図 3

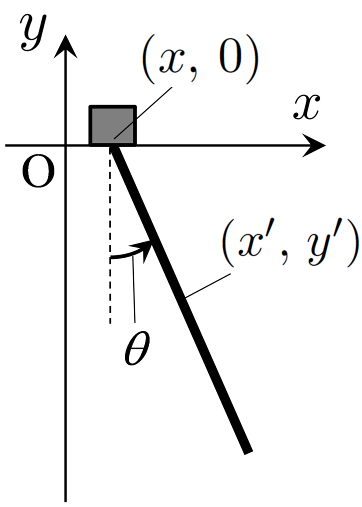


図 4

（計算用余白）

（計算用余白）
問題 2 は次ページから。

## 問題 2

3 次元直交座標系の 3 軸を $x, y, z$ とする。真空中に原点を中心とする半径 $a$ の円 $C$ が $xy$ 平面上にある。$C$ の円周上に固定された線密度 $q$ の電荷が一様に分布している。

**I**. まず、$C$ が静止している場合について考える。
真空中の位置 $\boldsymbol{r'}$ に置かれた点電荷 $Q$ が位置 $\boldsymbol{r}$ に作る静電ポテンシャル $\phi_0$ は、

$$\phi_0(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|}$$

と表される。ここで、$\varepsilon_0$ は真空の誘電率である。以下の問いに答えよ。

**(1)** $C$ の電荷によって位置 $\boldsymbol{r} = (0, 0, z)$ に生じる静電ポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r})$ を求めよ。

**(2)** $C$ の電荷によって位置 $\boldsymbol{r} = (0, 0, z)$ に生じる電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を求めよ。原点に置かれた点電荷 $Q'$ が受ける力を求めよ。

**(3)** $C$ の電荷分布による位置 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ での電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は、$C$ の線要素ベクトル $d\boldsymbol{r'}$ の大きさを $ds' = |d\boldsymbol{r'}|$ として、

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_C q ds' \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|^3}$$

と書ける。ここで、$z$ 軸周りの方位角 $\varphi$ を用い、$C$ 上の座標を $\boldsymbol{r'} = (a\cos\varphi, a\sin\varphi, 0)$ と表すのが便利である。$|\boldsymbol{r}| \ll a$ の条件で、$x, y, z$ の 1 次の項まで展開した式

$$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|^{-3} \sim a^{-3}\left[1 + \frac{3}{a}(x\cos\varphi + y\sin\varphi)\right]$$

を利用して、原点近傍における $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を計算せよ。このとき、$q$ と逆符号の点電荷を原点から $z$ 軸方向にわずかにずれた位置に置いたとき、点電荷が受ける力の向きを答えよ。また、ずれの方向が $xy$ 平面上 $(z = 0)$ のとき、点電荷が受ける力の向きを答えよ。

**II**. 次に、$C$ が原点を中心に電荷とともに $xy$ 平面内で一定の角速度で回転する場合を考える。回転の向きは $z$ 軸の $z$ が正の領域から見て反時計回りとする。これは、回路 $C$ に定常電流 $I$ が生じている状況に他ならない。

この電流 $I$ による位置 $\boldsymbol{r}$ におけるベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ は、

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_C \frac{d\boldsymbol{r'}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|}$$

で与えられる。ここで、$\mu_0$ は真空の透磁率である。$\boldsymbol{r'}$ は $C$ 上の位置、$d\boldsymbol{r'}$ は $C$ の線要素ベクトルである。以下の問いに答えよ。

**(4)** $C$ の電流 $I$ による原点近傍の位置 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ におけるベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=(A_x,A_y,A_z)$ を、$|\boldsymbol{r}|\ll a$ の条件で、$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|^{-1}$ を $x,y,z$ の 1 次の項まで展開した式を利用して求めよ。

**(5)** **(4)** で求めたベクトルポテンシャルを使って磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を求めよ。

**(6)** $C$ の $z$ 軸周りの慣性モーメントと角運動量ベクトルをそれぞれ $\mathcal{I}_C$ および $\boldsymbol{L}$ とする。電流 $I$ を $a$, $q$, $\mathcal{I}_C$, $\boldsymbol{L}$ の大きさ $L$ によって表せ。ここで求めた表式と **(5)** の結果を用いて $\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{L}$ の関係を求めよ。さらに、原点に磁気モーメント $\boldsymbol{M}$ を置くとき、$\boldsymbol{M}$ と $\boldsymbol{B}$ のポテンシャルエネルギー (相互作用エネルギー)$V$ が $V=-\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{B}$ で表されるとして、$V$ を $\boldsymbol{M}$ と $\boldsymbol{L}$ の内積を含む式で表せ。

**III**. 最後に、定常電流 $I$ が流れている回路 $C$ の半径 $a$ が微小である場合を考える。定常電流 $I$ の向きは **II.** と同じとする。

**(7)** $C$ の電流 $I$ による位置 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ におけるベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=(A_x,A_y,A_z)$ を、$|\boldsymbol{r}|\gg a$ の条件で、$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|^{-1}$ を $a$ の 1 次の項まで展開した式を利用して表すと、

$$\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0 I a^2}{4r^3}(-y,x,0)$$

となる。磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を求めよ。
次に、$\boldsymbol{m_1}=(0,0,\pi I a^2)$ と定義すると、磁束密度 $\boldsymbol{B}$ は、

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0}{4\pi r^5}\left[3(\boldsymbol{m_1}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}-\boldsymbol{m_1}r^2\right]$$

と一致することを示せ。ただし、$r=|\boldsymbol{r}|$ である。

**(8)** **(7)** の $\boldsymbol{m_1}$ による磁束密度 $\boldsymbol{B}$ に対して、原点から距離 $r$ の $z$ 軸上の位置 $\boldsymbol{r}$ に別の磁気モーメント $\boldsymbol{m_2}$ を置く。$\boldsymbol{m_2}=\pm\boldsymbol{m_1}$ のとき、それぞれ、$\boldsymbol{m_2}$ と $\boldsymbol{B}$ のポテンシャルエネルギー (相互作用エネルギー)$V$ を $I$, $a$, $r$ を含む式で表せ。
次に、原点から距離 $r$ の $xy$ 平面上の位置 $\boldsymbol{r}$ に $\boldsymbol{m_2}$ を置き直す。$\boldsymbol{m_2}=\pm\boldsymbol{m_1}$ のとき、それぞれ、同様に $V$ を求めよ。

（計算用余白）

（計算用余白）
問題 3 は次ページから。

## 問題 3

量子力学で 1 次元の散乱問題を考える。$x$ 軸上、負の無限大から質量 $m$ の粒子が正のエネルギー $E$ で入射してくるものとする。以下の問いに答えよ。ただしプランク定数を $2\pi$ で割ったものを $\hbar$ とする。

**I**. まず、ポテンシャルが

$$V(x) = -V_0\delta(x)$$

で与えられる場合を考える。ただし $V_0$ は正の有限な実数であり、$\delta(x)$ はディラックのデルタ関数である。波動関数 $\phi(x)$ が満たすシュレディンガー方程式は、

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right]\phi(x) = E\phi(x)$$

で与えられる。$x < 0$ における波動関数を

$$\phi_1(x) = e^{iqx} + re^{-iqx}$$

とし、$x > 0$ における波動関数を

$$\phi_2(x) = te^{iqx}$$

とする。ただし $q = \sqrt{2mE}/\hbar$ であり、$r$ と $t$ は複素係数である。

$\phi_1(x)$ の式の右辺第 1 項は $x$ の正の方向に伝播する入射波を、右辺第 2 項は反射波を表している。一方、$\phi_2(x)$ の式の右辺は透過波を表している。

**(1)** $\phi_1(x)$ と $\phi_2(x)$ が $x \to 0$ で一致することから、$r$ と $t$ が満たす関係式を求めよ。

**(2)** シュレディンガー方程式の両辺を $x = -\epsilon$ から $x = \epsilon$ まで積分し ($\epsilon > 0$)、$\epsilon \to 0$ の極限を取ることにより、$r$ と $t$ が満たすもうひとつの関係式が以下の形で求まる。

$$t + r = \boxed{\text{(あ)}}\, t + 1$$

式中の (あ) を、以下で定義される無次元量 $\omega$ を用いて表せ。

$$\omega = \frac{\hbar^2 q}{mV_0}$$

**(3)** 反射率 $|r|^2$ と透過率 $|t|^2$ をそれぞれ $\omega$ を用いて表せ。

**(4)** $V_0$ が一定のとき、$E \to 0$ および $E \to \infty$ の極限における $|r|^2$ と $|t|^2$ の値を求めよ。次に、$E$ が一定の下で $V_0 \to -V_0$ としたとき (引力的ポテンシャルが斥力的になったとき)、$|r|^2$ と $|t|^2$ がどうなるかを簡潔に答えよ。

**II**. 次に、ポテンシャルが

$$V_{\mathrm{D}}(x) = -V_0\delta(x) - V_0\delta(x-a)$$

で与えられる場合の散乱問題を考える。ただし $a > 0$ とする。

**(5)** $x < 0$ における波動関数を

$$\psi_1(x) = A_1 e^{iqx} + B_1 e^{-iqx}$$

とし、$0 < x < a$ における波動関数を

$$\psi_2(x) = C_1 e^{iqx} + D_1 e^{-iqx}$$

とする。

これらの波動関数の係数には、

$$B_1 = rA_1 + tD_1,$$

$$C_1 = tA_1 + rD_1$$

という関係がある。ただし $r$ と $t$ は前問 **I.** で導入した複素係数である。それらの物理的解釈に留意しつつ、上記の 2 つの関係式が成り立つ理由を説明せよ。

**(6)** **(5)** で示した 2 つの関係式を用いて以下の表式を作る。

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ D_1 \end{pmatrix} = Z \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}$$

ここで $Z$ は 2 行 2 列の行列である。$Z$ の各要素を $r$ と $t$ を用いて表せ。

**(7)** 次に、$0 < x < a$ における波動関数を

$$\psi_2(x) = A_2 e^{iq(x-a)} + B_2 e^{-iq(x-a)}$$

と表現してみよう。この式と、**(5)** で導入した $\psi_2(x)$ の表式を比較することにより、

$$\begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = Y \begin{pmatrix} C_1 \\ D_1 \end{pmatrix}$$

を満たす 2 行 2 列の行列 $Y$ の各要素を求めよ。

**(8)** $x > a$ における波動関数を

$$\psi_3(x) = C_2 e^{iq(x-a)} + D_2 e^{-iq(x-a)}$$

とする。この式と、**(7)** で導入した $\psi_2(x)$ の表式に対して、**(5)** と同じ考え方を適用すれば、$C_2$ と $D_2$ は、$A_2$ と $B_2$ を用いて表すことができる。このことと、**(5)**–**(7)** の結果を組み合わせることにより、

$$\begin{pmatrix} C_2 \\ D_2 \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}$$

が得られる。$X$ を、$Z$ と $Y$ を用いて表せ。

**(9)** **(8)** で得た表式において $C_2 = t_2$, $D_2 = 0$, $A_1 = 1$, $B_1 = r_2$ とすれば、$V_{\mathrm{D}}(x)$ による反射率 $|r_2|^2$ と透過率 $|t_2|^2$ を求めることができる。ここでは $a = 2n\pi/q \quad (n:$ 自然数) となる場合を考えよう。まず $Z$ を $\omega$ を用いて表した上で、$|r_2|^2$ と $|t_2|^2$ を $\omega$ を用いて表せ。また、得られた結果の物理的意味を、**(3)** の結果と比較して簡潔に論じよ。

（計算用余白）
問題 4 は次ページから。

## 問題 4

一成分流体の絶対温度 $T$、圧力 $P$、化学ポテンシャル $\mu$ は互いに独立に変化できず、ギブス・デュエムの関係式を満たす。本問では、熱平衡状態を仮定して、熱力学からこの関係式を導出したあと、統計力学を簡単な系に適用して実際に $T$, $P$, $\mu$ が相互依存することを確認し、最後にギブス・デュエム関係式を応用して、水滴が形成されているときの飽和蒸気圧について考える。

**I**. 一成分流体（気体または液体）のヘルムホルツ自由エネルギーを絶対温度 $T$、体積 $V$、構成分子の数（粒子数）$N$ の関数として表した $F(T, V, N)$ の全微分（完全微分）は、流体のエントロピー、圧力、化学ポテンシャルをそれぞれ $S$, $P$, $\mu$ として、

$$dF = -SdT - PdV + \mu dN$$

である。

**(1)** ルジャンドル変換 $G = F + PV$ により定まるギブス自由エネルギー $G(T, P, N)$ の全微分を、

$$dG = \boxed{\text{(あ)}}\, dT + \boxed{\text{(い)}}\, dP + \boxed{\text{(う)}}\, dN$$

と書いたとき、空欄 (あ)、(い)、(う) に当てはまる式を $S$, $V$, $N$, $T$, $P$, $\mu$ のうち必要なものを用いて表せ。

**(2)** 化学ポテンシャルは示強変数なので、これを $T$, $P$, $N$ の関数として表した $\mu(T, P, N)$ は、実際には $N$ に依存しない。この事実と **(1)** の結果に着目し、$G$ を $S$, $V$, $N$, $T$, $P$, $\mu$ のうち 2 つの熱力学変数の積で表せ。さらに、$\mu(T, P)$ の全微分の表式（ギブス・デュエムの関係式）、

$$d\mu = -sdT + vdP$$

を導け。ただし、$s = S/N$, $v = V/N$ とする。

**II**. 統計力学を適用して、3 次元の単原子分子理想気体に対し $T$, $P$, $\mu$ を結ぶ関係式を導こう。以下、プランク定数を $h$、ボルツマン定数を $k_{\mathrm{B}}$、原子の質量を $m$ とする。また、原子を内部構造を持たず、スピンも持たない粒子として扱う。

**(3)** まず、古典統計力学の範囲で考える。正準分配関数 $Z$ の計算式は、気体の絶対温度を $T$、体積を $V$、粒子数を $N$、各原子の運動量を表す積分変数を $\boldsymbol{p}_i$ として、

$$Z(T, V, N) = \frac{V^N}{h^{3N} N!} \int d^3\boldsymbol{p}_1 d^3\boldsymbol{p}_2 \cdots d^3\boldsymbol{p}_N \exp\left( -\frac{1}{k_{\mathrm{B}}T} \sum_{i=1}^{N} \frac{\boldsymbol{p}_i^2}{2m} \right)$$

である。積分を実行した結果をもとに、単原子分子理想気体のヘルムホルツ自由エネルギー $F(T,V,N)$ を $k_{\mathrm{B}}T$, $V$, $N$, $\lambda=\dfrac{h}{\sqrt{2\pi m k_{\mathrm{B}}T}}$ を用いて書き表せ。その際、ガウス積分の公式 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$ と、$N\gg 1$ のとき成り立つスターリングの公式 $\ln N! \sim N\ln N - N$ を使ってよい。

**(4)** **(3)** の結果をもとに $\mu$ を $k_{\mathrm{B}}T$, $P$, $\lambda$ を用いて表せ。

**(5)** 次に、原子をボーズ粒子として扱い、量子統計力学で考える。粒子数の平均値 $N$ を絶対温度 $T$、体積 $V$、化学ポテンシャル $\mu$ の関数として表した結果は、

$$N=\int_0^{+\infty} D(\epsilon)f(\epsilon)d\epsilon, \quad D(\epsilon)=VA\epsilon^a, \quad f(\epsilon)=\frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/k_{\mathrm{B}}T}-1}$$

の形になる。ただし、$\epsilon$ は一粒子のエネルギー、$D(\epsilon)$ は一粒子状態密度、$f(\epsilon)$ はボーズ分布関数を表す。一粒子状態密度に現れる定数 $A$ と $a$ を、$h$ と $m$ のうち必要なものを用いて書き表せ。なお、気体がボーズ・アインシュタイン凝縮する可能性は考えない。

**(6)** **(5)** で与えた $N$ の表式と、グランドポテンシャル $\Omega=F-\mu N$ の二階偏微分に対し $\dfrac{\partial^2\Omega(T,V,\mu)}{\partial\mu\partial V}=\dfrac{\partial^2\Omega(T,V,\mu)}{\partial V\partial\mu}$ が成立することから導かれるマックスウェル関係式 $\dfrac{\partial P(T,V,\mu)}{\partial\mu}=\dfrac{\partial N(T,V,\mu)}{\partial V}$ に注意して、圧力 $P$ を $T$ と $\mu$ の関数として表せ。結果に定数 $A$, $a$ および実行されていない $\epsilon$ に関する積分を含んでいてよい。真空の圧力がゼロであること（$\displaystyle\lim_{\mu\to-\infty}P=\lim_{N\to 0}P=0$）にも注意せよ。

**III.** 温度一定の大気中に、一成分気体が入った体積 $V$ の球形の風船が浮いており、熱平衡状態に達している。以下、重力の影響を無視する。風船の膜は非常に薄く、物質を通さず熱だけを通し、ヘルムホルツ自由エネルギーに膜の面積に比例する寄与を与えるものとする。つまり、風船内の気体のヘルムホルツ自由エネルギー $F(V)$ と、正の比例係数 $\gamma$ を用いて、風船内の気体と風船を合わせた系のヘルムホルツ自由エネルギーを

$$F_{\mathrm{tot}}(V)=F(V)+\gamma V^{2/3}$$

と書くことができる。ここでは、風船内の気体と風船の温度が大気と共通かつ一定で、風船内の気体分子の数も一定だから、ヘルムホルツ自由エネルギーの $V$ 依存性だけを明示した。

**(7)** 風船内の圧力 $P_{\mathrm{in}}$ と風船外の圧力 $P_{\mathrm{ex}}$ の差 $\Delta P=P_{\mathrm{in}}-P_{\mathrm{ex}}$ を

$$\Delta P=BV^b$$

の形に表して、定数 $B$ と $b$ を求めよ。この結果から、大気中で風船に息を吹き込んで膨らませるとき、最初は苦しく、風船が膨らんでくると楽になる現象を説明できる。

**IV**. 絶対温度 $T$ の水蒸気中に球形の水滴が浮いており、熱平衡状態に達している。ここでも重力の影響を無視する。水滴表面はヘルムホルツ自由エネルギーにその表面積に比例する寄与 $\gamma V^{2/3}$（$\gamma$：正の比例係数）を与えるので、水滴の体積を $V$、水滴内の水の圧力 $P_{\mathrm{L}}$ と水滴外の水蒸気の圧力 $P_{\mathrm{G}}$ の差を $\Delta P = P_{\mathrm{L}} - P_{\mathrm{G}}$ とすると、**(7)** で導いた関係式がそのまま成立する。**III.** との違いは、$\gamma$ の値が異なることと、水滴内の水と水滴外の水蒸気の間に水分子のやりとりがあることである。このとき、水滴内の水の化学ポテンシャル $\mu_{\mathrm{L}}$ と水滴外の水蒸気の化学ポテンシャル $\mu_{\mathrm{G}}$ の間に、

$$\mu_{\mathrm{L}} = \mu_{\mathrm{G}}$$

の関係が成り立つ。

**(8)** 体積 $V$ の水滴ができているときの飽和蒸気圧は、**(7)** で導いた関係式と上記の $\mu_{\mathrm{L}} = \mu_{\mathrm{G}}$ を連立させて、$P_{\mathrm{G}}$ について解くことによって求まる。ここでは絶対温度 $T$ が一定だから、解は $V$ の関数になる。それを $P_{\mathrm{G}} = P_{\mathrm{G}}(V)$ と書こう。**(2)** で導いたギブス・デュエムの関係式と $dT = 0$ から、水滴内の水と水滴外の水蒸気それぞれに対し、

$$\begin{aligned} d\mu_{\mathrm{L}} &= v_{\mathrm{L}} dP_{\mathrm{L}} \\ d\mu_{\mathrm{G}} &= v_{\mathrm{G}} dP_{\mathrm{G}} \end{aligned}$$

が成り立つ。これらの式に注意して $P_{\mathrm{G}}(V)$ が従う微分方程式を導け。ただし、水の分子一個あたりの体積 $v_{\mathrm{L}}$ が水蒸気の分子一個あたりの体積 $v_{\mathrm{G}}$ に比べて圧倒的に小さいので、結果を $v_{\mathrm{L}}/v_{\mathrm{G}}$ について一次近似せよ。また、結果を **(7)** の $B$ と $b$ を含んだ形で書き表してよい。

**(9)** ここでは、$v_{\mathrm{L}}$ を圧力によらない定数とみなし、$v_{\mathrm{G}}$ が近似的に古典理想気体の状態方程式 $v_{\mathrm{G}} = k_{\mathrm{B}}T/P_{\mathrm{G}}$ に従うとする。**(8)** で導いた微分方程式を解くことにより、体積 $V$ の水滴ができているときの飽和蒸気圧 $P_{\mathrm{G}}(V)$ を $V$, $k_{\mathrm{B}}T$, $\gamma$, $v_{\mathrm{L}}$, $P_\infty$ を用いて表せ。ここで、$P_\infty = \lim\limits_{V \to +\infty} P_{\mathrm{G}}(V)$ は水と水蒸気の境界面が平面になっているときの（普通の意味での）飽和蒸気圧である。

（計算用余白）

（計算用余白）

（計算用余白）