大阪大学・大学院理学研究科

博士前期課程（宇宙地球科学専攻・第 2 次募集）入学試験問題

小論文

（2019 年 10 月 26 日 11 時 00 分～12 時 30 分）

次の［１］から［４］までの４問のうちから２問を選択して解答せよ。各問題に一枚の答案用紙を用いること。問題番号、受験番号を記入し解答せよ。表面だけでは足りない場合は裏面に記入してよい。ただし「裏面記入」と表面に明記のこと。

[1]

ニュートンの運動法則に従う二つの質点 1 と 2 があり、質量をそれぞれm_1とm_2、三次元直交座標系(x, y, z)での位置ベクトルをそれぞれ$\mathbb{r}_1 =(x_1, y_1, z_1)$及び$\mathbb{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$とする。この二つの質点が、時間$t$にあらわに依存するポテンシャル関数$U(\mathbb{r}_1, \mathbb{r}_2, t)$で記述される力のみで相互作用する。ただし$U(\mathbb{r}_1, \mathbb{r}_2, t)$は全微分可能とする。この系について、以下の問いに答えよ。ベクトル$\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial y_1}, \frac{\partial U}{\partial z_1}\right)$などはまとめて$\frac{\partial U}{\partial \mathbb{r}_1}$などと書いてよい。その他、必要な記号は適宜定義して使ってもよい。

(1) 二つの質点それぞれに働く力を、ポテンシャル関数$U(\mathbb{r}_1, \mathbb{r}_2, t)$を用いて表せ。

(2) (1)の結果を用いて、質点 1 と 2 に関する運動方程式をそれぞれ書け。

(3) この系の全運動量が保存するための必要十分条件を、$U(\mathbb{r}_1, \mathbb{r}_2, t)$を用いて表せ。次に、その条件が作用反作用の法則を表していることを説明せよ。

(4) 方向は任意の 3 次元無限小ベクトルを$\mathbb{d}$とする。この系において全運動量が保存するための必要十分条件が$U(\mathbb{r}_1 + \mathbb{d}, \mathbb{r}_2 + \mathbb{d}, t) = U(\mathbb{r}_1, \mathbb{r}_2, t)$であることを示せ。

(5) 全運動量が保存するとき、$U(\mathbb{r}_1, \mathbb{r}_2, t)$は$\mathbb{r}_1 - \mathbb{r}_2$と$t$だけに依存する関数であることを示せ。

(6) この系の全力学的エネルギーは必ずしも保存しないことを示せ。次に、全力学的エネルギーが保存するためには$U(\mathbb{r}_1, \mathbb{r}_2, t)$に関してどのような条件が新たに必要になるか、式を使わずに 30 字程度で説明せよ。

(7) この系の角運動量を考える。作用反作用の法則が成り立っているとき、全角運動量が保存するための必要十分条件は、質点に働く力と$\mathbb{r}_1 - \mathbb{r}_2$が平行であることを示せ。

(8) （4）と（6）と（7）から、系の保存量と$U(\mathbb{r}_1, \mathbb{r}_2, t)$の対称性には密接な関係のあることが予想される。全力学的エネルギー、全運動量、全角運動量のそれぞれの保存に対して、どのような対称性（不変性）が対応しているか指摘せよ。

(9) ニュートンの運動方程式を必要な初期条件のもとに解けば、物体の位置を時間の関数として求められ、その運動が完全に追跡できる。もし宇宙全体についての運動方程式を素早く解ける巨大コンピュータがあって、観測などから初期条件を精度良く求められれば、全宇宙の未来を完全に予測できることになる。このようなことが本当に可能であるかどうか考え、10 行以内程度で簡潔に論じよ。

［２］

以下の電磁気学に関する設問(１)から(３)より、２問を選択して解答せよ。
なお、答案用紙には、選択した設問番号 (1) ～ (3)を記入せよ。

（１）電磁場に関する、以下の問に答えよ。

a）真空中の電磁場(電場$\boldsymbol{E}$、磁場$\boldsymbol{B}$)は、電荷密度 ρ 並びに電流密度 $\boldsymbol{j}$ を用いて、以下のマクスウェル方程式によって記述される。

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}、\mathrm{rot}\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}、\quad \mathrm{div}\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}、\quad \mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0$$

ここで、ε_0、μ_0はなんと呼ばれているか記せ。

b）上記マクスウェル方程式より、電荷も電流もない真空中を伝播する電磁波の方程式（電場のみで良い）を導出し、その伝播速度 c をε_0およびμ_0を用いて表せ。

参考ベクトル解析公式：$\mathrm{rot\ rot}\boldsymbol{A} = \mathrm{grad\ div}\boldsymbol{A} - \Delta\boldsymbol{A}$

c）電場 $\boldsymbol{E}$ ならびに磁場 $\boldsymbol{B}$ は、電磁ポテンシャル（ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ 及びスカラーポテンシャル ϕ ）によってどのように定義されるかを記せ。
また、「ベクトルポテンシャルには、ゲージ変換の任意性がある。」あるいは「電磁場は、ゲージ変換に対して不変である。」とはどういうことか、定義に従って説明せよ。

d）超伝導体は完全反磁性である。従って、トロイダル形状（ドーナツ型）の永久磁石を超伝導体で取り囲んだ下図の様な構造を作ると、超伝導体外部には、磁場が存在できない。この様な超伝導体外部でもベクトルポテンシャルは有限の値を取ることを定義より示せ。下図に於いて、トロイダル磁場は、断面積 Sで一様な磁束密度 B_0 を持つとする。

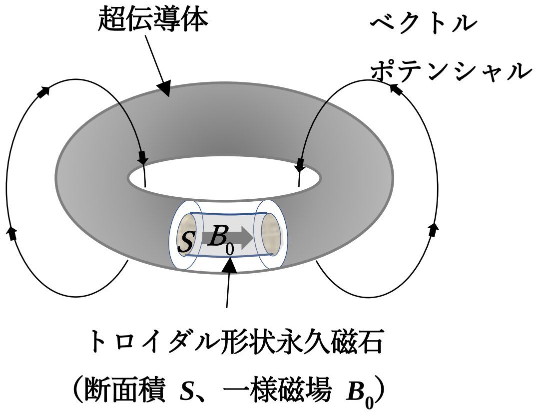

図１．超伝導体に閉じ込められた一様なトロイダル磁場

（2）以下のプラズマに関する問に答えよ。

a）プラズマ中のイオンのクーロン場は周囲の電子による静電遮蔽を受ける。この静電遮蔽には、密度と温度に依存する特性長λがある。１価のイオンからなる球対称の一様プラズマ（平均イオン数密度を n_0 とする）を考える。イオン温度 T_i 並びに電子温度 T_e は等しいものとする（$T_i = T_e = T$ ）。極座標で電荷密度 $\rho(r)$、静電ポテンシャルを $V(r)$とすると、ポアソン方程式は、

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial V(r)}{\partial r}\right] = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 rV(r)}{\partial r^2} = -\frac{\rho(r)}{\varepsilon_0}$$

と表される。イオンは静止しており、電子の密度分布は、ボルツマンの関係より、

$$n_e(r) = n_0 \exp\left(\frac{\mathrm{e}V(r)}{\mathrm{k}T}\right) \cong n_0\left(1 + \frac{\mathrm{e}V(r)}{\mathrm{k}T}\right)$$

$$\rho(r) = \mathrm{e}n_0 - \mathrm{e}n_e(r)$$

と近似できるとする。ここで、e は素電荷、k はボルツマン定数である。

$r \to \infty$で$V \to 0$ となるポテンシャル $V(r)$ が、$V(r) = \frac{A}{r}\ \exp(-\frac{r}{\lambda})$と表されることを示し、　特性長λを求めよ。

b）プラズマ中の電子の分布が、背景となるイオンの分布より変位すると、電荷分離による電場によって、電荷中性を回復する方向に力が働き、電子群は振動運動を行う。この振動運動の角振動数は、$\omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m_e}}$ で与えられる。プラズマ中の電磁波の分散関係は、電磁波の角振動数ω、波数 k 並びにこの角振動数 ω_pを用いて、

$\omega^2 = \omega_p^2 + \mathrm{c}^2 k^2$　で与えられる。ここで、c は真空中の光速である。

この時、位相速度、並びに群速度を c、 ω_p 並びに k を用いて表せ。

また、 $\omega = \omega_p$では何が起こるか、説明せよ。(100 字程度)

c）地球大気の上層部には、太陽光による光電離によって電離した領域がある。この領域の存在によって低周波（短波帯）の電波を用いた遠距離通信が可能となっている。また、夜間は、この遠距離通信が難しくなる。この現象を説明せよ。(200 字程度)

d）上記 a)の λ はプラズマの特性的な長さを、b)の $1/\omega_{\mathrm{p}}$は特性的な時間を表す。では、この二つから算出される特性的な速度 $v = \lambda \cdot \omega_{\mathrm{p}}$ は何を意味するのかを、式変形より見出し、物理的な意義を論ぜよ。(100 字程度)

（3）図２は、トムソンパラボラ荷電粒子分析装置(Thomson parabola analyzer)の概念図である。x軸方向に幅 d の長方形の電極兼板磁石２枚を$x-z$面に平行に、一辺が$y-z$面に接する様に($x=0$)、$y=h$ 並びに $y=-h$ 面内に配置する。二枚の電極間には、y軸方向の一様電場 E_y 並びに磁場 B_y が印加されている。以下の指示に従い、その動作原理を説明せよ。

a）原点より、x軸の正の方向に速度 v、質量 m、電荷量 q の荷電粒子を入射する。電極内での非相対論的運動方程式をたてよ。 電極外の漏れ電場、漏れ磁場は無視して良いものとする。

b）磁場、電場はy軸方向なので、粒子は$x-z$面内では円運動をする。この円運動の半径 r を求めよ。

c）$x=d$ の電極端に到達する時間 t_d を v、d、r を用いて表せ。

また、その時の座標 (x_1, y_1, z_1)、並びに速度 (v_x, v_y, v_z) を求めよ。t_dを用いても良い。

d）$d << r$ として、d/r の１次まで取ると、

$t_d = \frac{d}{v}$、$y_1 = \frac{1}{2}\frac{qE}{m}\left(\frac{d}{v}\right)^2$、$z_1 = 0$、$v_x = v$、$v_y = \frac{qE}{m}\frac{d}{v}$、$v_z = \frac{vd}{r}$と近似できる。

これらを用いて、 原点から $d+L$ 離れた$y-z$面に平行なスクリーン上の到達点の座標 (y', z') を求め、$y' \propto \left(\frac{1}{2}mv^2\right)^{-1}$、 $z' \propto (mv)^{-1}$、 $y' \propto \frac{m}{q}z'^2$ となる（同じ m/q を与える粒子は、エネルギーの違いによって放物線上に分布する）ことを示せ。

e）スクリーン上には、荷電粒子を観測するための位置検出器が配置される。どの様な検出器が考えられるか、知るところを述べよ。(100 字程度)

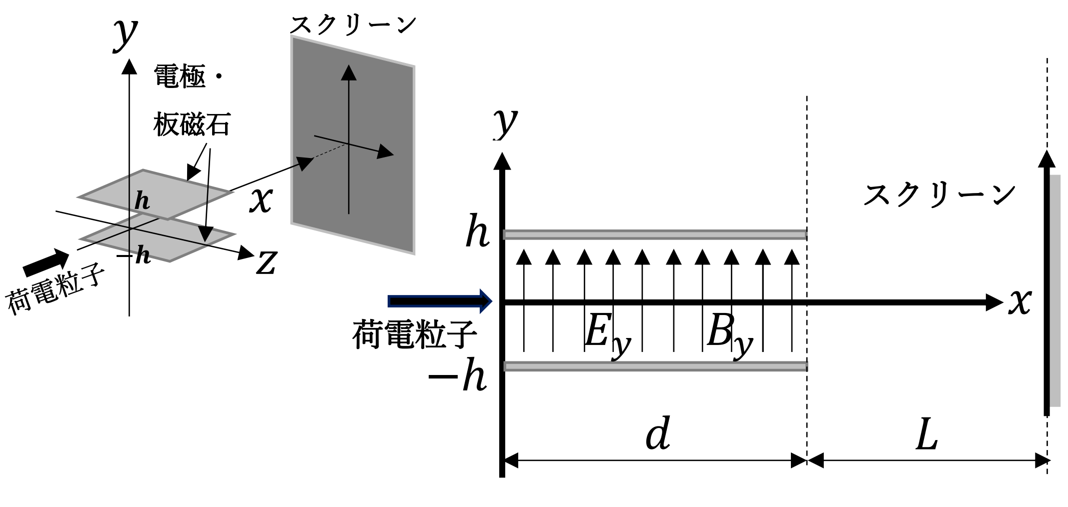

図２．トムソンパラボラ荷電粒子分析装置(Thomson parabola analyzer)の原理図。

［3］

星間ガスから星が形成される過程を単純化して考えたい。初期状態として、ガスは、密度ρ、圧力pとも一様で、無限に広がっており、重力が互いに打ち消しあう力学的平衡状態にある。ガスは単原子分子からなる理想気体で、定数γを使って、p/ρ^{γ}が一定という関係が保たれるとする。初期状態で、ある点を中心に半径rの領域に含まれるガスに着目する。このガスをδrだけ圧縮し、圧縮後の密度を$\rho+\delta\rho$、圧力を$p+\delta p$とする。ただし、$r \gg \delta r$、$\rho \gg \delta\rho$、$p \gg \delta p$と考え、δr、$\delta\rho$、δpの一次の項までを考慮すればよい。万有引力定数をGとして以下の問いに答えよ。

(1) 今着目しているガス球（初期状態では半径r、圧縮後は$r-\delta r$）の質量が保存することを使って、$\delta\rho$とδrの関係を導け。

(2) このガスの圧縮においてp/ρ^{γ}が一定であることを使い、$\delta\rho$とδpの関係を導け。

(3) 初期状態で、ガス球の表面付近の単位体積に働く自己重力F_{G}の大きさを記せ。

(4) 圧縮によって、ガス球の表面付近の単位体積に働く自己重力は増加する。その増分δF_{G}を、(1) の関係式も用いて、G、ρ、δrを使って記せ。

(5) 圧縮によって生じた、ガス球の表面付近の単位体積に働く圧力勾配による反発力の大きさδF_{p}は、$\delta p/r$と近似できる。(1)、(2) で導いた関係式を使い、δF_{p}をρ、p、r、δr、γのうち必要な文字を使って書け。

(6) $\delta F_{\mathrm{G}} < \delta F_{\mathrm{p}}$の場合、圧縮によって増加する反発力が重力より強くなるため、ガス球はもとの半径に戻り安定である。一方、$\delta F_{\mathrm{G}} > \delta F_{\mathrm{p}}$の場合、圧縮によって重力収縮が起こる不安定な状態である。この不安定が起こるrに対する条件を、G、ρ、p、γのうち必要な文字を使った不等式で書け。

(7) 半径rのガス球質量をMとして、(6) の不等式を、Mに対する不等式に変形すると、その境目になる質量は、ρ^{α}に比例するという依存性をもつ。αをγを使って表せ。

(8) (7) の不等式の境目になるMは、(ここでは単純化した計算で求めているため、通常知られるそれとはファクタ倍異なるが)、ジーンズ質量と呼ばれる量に相当する。星間ガスが他の星間ガスとの衝突などによって擾乱を受けた場合に、どのように星が生まれるのか、ジーンズ質量という言葉を使い、また、(7) の結果も参照しながら、100-200字程度で記述せよ。ただし、密度ρが低いときには等温過程（$\gamma=1$)、密度ρが高いときには断熱過程（$\gamma=5/3$）と仮定せよ。

［4］

以下に記す設問 (1)から(7)のうち、2 問を選択して、それぞれ解答せよ。必要に応じて図を使っても良い。なお、答案用紙には、選択した設問番号 (1) ～ (7)を記入せよ。

(1) 面心立方格子の格子点に半径 r の原子があり、互いに接している。このとき、八面体位置に入り格子点の原子と接する原子の半径と、四面体位置に入り格子点の原子と接する原子の半径を答えよ。

(2) 地質調査の時、沢 A で見つけた薄い火山灰層を沢 B でも見つけた。この様子を、地形図で描きなさい。火山灰層が地表に現れる場所を明示すること。火山灰層の走向傾斜は自由に設定して良いが、傾斜 0 度と傾斜 90 度は避けること。定規の使用は前提としていないので、図の精度は低くて良いが作図の原理を理解していることを示せるような図にすること。

(3) 大気のない固体天体表面で見られる宇宙風化とはどのような現象か。宇宙風化するしくみ、どのように観測されるか、人類が手にしている宇宙風化の試料にはどこの天体のものがあるか、なぜ宇宙風化の研究が重要か、という項目で説明せよ。

(4) 水溶液が入った試料セルに入射する前の光の強度を I_0、試料セルを透過した後の光の強度を I_1 としたとき、ある波長における吸光度 $A=-\log_{10}(I_1/I_0)$ と試料セルの光路長 L と水溶液中の溶質の濃度 C との関係を式で示せ。比例係数が必要なら k の文字を使うこと。月惑星探査において、衛星軌道から可視光・近赤外光で天体表面を探査する際、太陽を入射光として地表面に分布する鉱物の種類を光の吸収ピーク波長をもとに判別している。なぜ本来透過光で観測される吸収ピークが衛星軌道上から反射光で観測できるのかを説明せよ。また、月惑星探査で可視光・近赤外光領域の観測で得られた成果について、知っているものを一つあげて解説せよ。

(5) 他の天体の地殻も、地殻を上昇してくるマグマも、地球と同じ物質だとする。地球よりも重力加速度が大きい天体と小さい天体で、マグマだまりの深さは地球と比べてそれぞれどうなると考えられるか。また、水平な地表面に噴出し同心円状に広がる溶岩流の厚さは、地球と比べてそれぞれどうなるか、理由とともに説明せよ。

(6) 現在の文明を支えている鋼鉄の主たる原料は、鉄鉱石、石炭、石灰岩である。これら 3 種類の原料がどうやってできたか答えよ。また、それぞれ地球外惑星にも存在するかどうか考察せよ。

(7) 隕石の種類にはどのようなものがあるか説明せよ。また、そのうち 2 種類について、それぞれその種類の隕石を調べることでどのような科学的に重要なことがわかるかを説明せよ。さらに、小惑星探査のニュースや隕石落下ニュースに対応する隕石種を知っているものがあれば、ニュースの概略と対応する隕石種を 3 例以上書け。