問題 1

図 1 のような、質量 m のおもり、支点からおもりまでの長さ l の糸からなる単振り子がある。糸が鉛直方向となす角度を θ とする。ここで、θ は十分小さく、$\sin\theta \simeq \theta$、$\cos\theta \simeq 1-\frac{1}{2}\theta^2$ とする。また、$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$（$t$ は時間）とする。以下では、単振り子の振動の 1 周期における運動エネルギーの最大値を、単振り子のエネルギー E とよぶ。また、振動の 1 周期における θ の最大値を α とする。重力加速度の大きさを g として、以下の問に答えよ。ただし、糸にたるみはなく、おもりの大きさ、糸の質量、摩擦は無視できるとする。

I. まず糸の長さ l は一定とする。

(1) θ 方向の運動方程式を書き、$t=0$ で $\theta=\alpha$ としてこの方程式の解を書け。

(2) 単振り子のエネルギー E を m, g, l, α のみを用いて表せ。

(3) 糸の張力 T を $m, g, l, \theta, \dot{\theta}$ を用いて表せ。

(4) 振動の 1 周期に関して張力 T の時間平均 $\langle T\rangle$ を求めよ。

II. 周期と比べて十分に長い時間をかけて、糸の長さをゆっくりと微小な長さだけ変化させたところ、長さ l が $l+\delta l$ となった。このとき、単振り子の角振動数 ω、θ の最大値 α、単振り子のエネルギー E も微小変化した。

(5) 糸の長さが δl 変化するとき、角振動数 ω の変化量 $\delta\omega$ を $\omega, l, \delta l$ を用いて表せ。

(6) この間に張力のする仕事 δW を求めよ。ここで、**(4)** の結果を用いてよい。また δW は、単振り子のエネルギー E の変化量 δE と、単振り子全体としての下降（上昇）に伴う位置エネルギーの変化量との和、に等しいことを用いて、δE を求めよ。ただし、δW および δE は $m, g, \alpha, \delta l$ のみを用いて表せ。

(7) 糸の長さが δl 変化する前後で $\frac{E}{\omega}$ は変化しないことを示せ。

III. 角度 θ を一般化座標と考え、θ に正準共役な一般化運動量を p とし、θ と p からなる位相空間内の運動を見てみよう。

(8) 糸の長さ l は一定として、一般化運動量 $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}$ を $m, l, \dot{\theta}$ を用いて表せ。ただし、L はこの系のラグランジアンである。

(9) 糸の長さ l は一定として、各時刻の θ および p で決まる位相空間内の点が振動の 1 周期の間どのような軌道上を運動するかを考える。単振り子のエネルギー E に着目して軌道を表す式を求め、横軸を θ、縦軸を p として軌道を図示せよ。

(10) II と同様に糸の長さが δl 変化する前後で、積分値 $\oint p d\theta$ は変化しないことを示せ。ただし、積分は振動の 1 周期について行う。

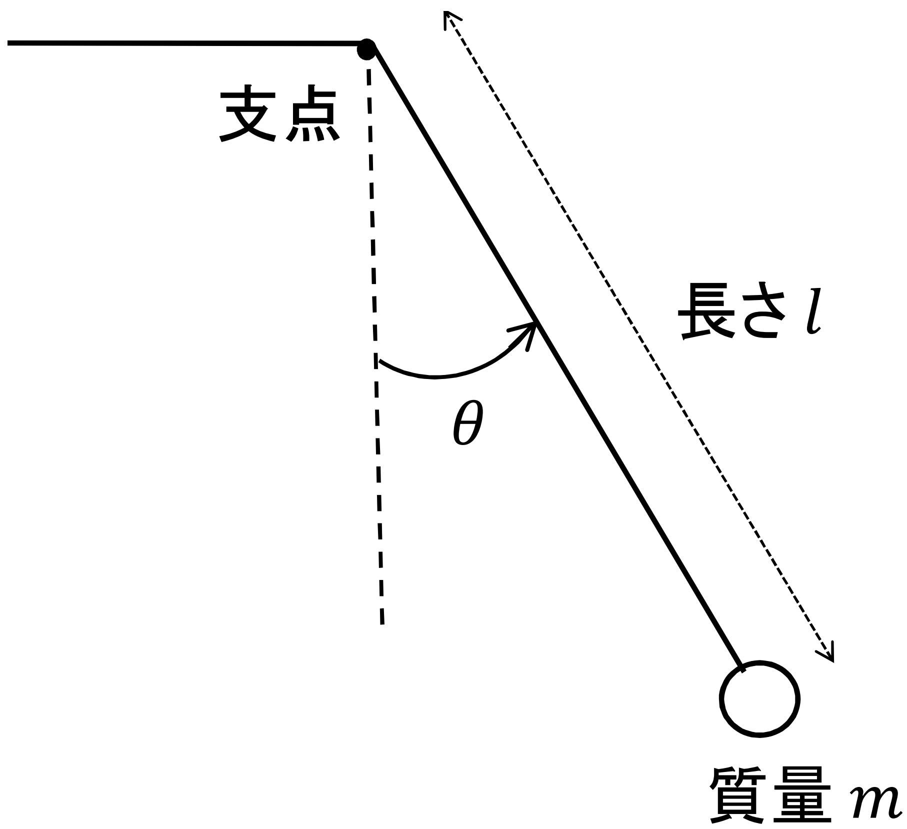

図 1

（計算用余白）

（計算用余白）
問題 2 は次ページから。

問題 2

直線状に流れる電流によって生じる電磁場を考察しよう。図 1 の矢印のように z 軸方向に沿った導線を $z = -\infty$ から $z = +\infty$ まで電流が流れている。時刻 t における電流を、$+z$ 方向を正として $I(t)$ とする。また導線の太さは無視できるとする。デカルト座標系における x, y, z 軸方向の単位ベクトルを $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$、 円筒座標系の単位ベクトルを $\hat{r}$, $\hat{\phi}$, $\hat{z}$（図 1 を参照）とする。

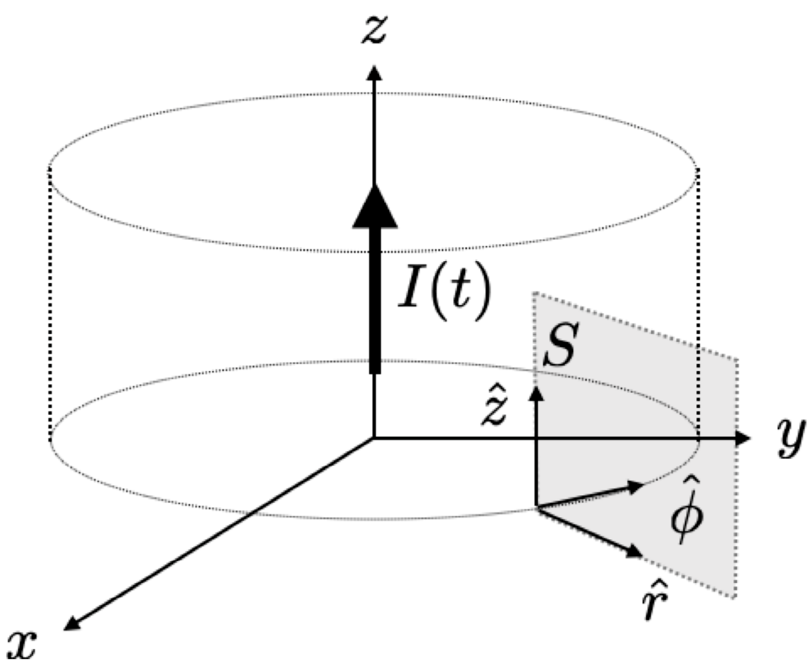

図 1

以下の問で、必要に応じて電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$、磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)$ の従うマクスウェル方程式 (i)–(iv) を用いよ。導線上を含めいたるところで電荷密度は 0 である。

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = 0 \tag{i}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = -\frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} \tag{ii}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = 0 \tag{iii}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = \mu_0 \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} \tag{iv}$$

ここで $\boldsymbol{r}$ は位置を表わし、ϵ_0, μ_0 はそれぞれ真空の誘電率および透磁率である。図 1 の電流 $I(t)$ について電流密度は

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t) = I(t)\delta(x)\delta(y)\hat{z}$$

と表せる。ここで $\delta(a)$ はデルタ関数である。

I. まず、電流の時間変化が全く無い場合と、ゆっくりと増加する場合を考える。

(1) 定常電流 I が流れている場合の、z 軸からの距離 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$（ただし $r > 0$）の点での静磁場の大きさと向きを答えよ。ここでは I を正の定数とする。その向きは、円筒座標系の単位ベクトル $\hat{r}$, $\hat{\phi}$, $\hat{z}$ を用いて示せ。

(2) 電流 $I(t)$ が非常にゆっくりと増加する場合を考える。磁場は **(1)** の結果で、$I \to I(t)$ としたもので近似的に与えられると仮定しよう。このとき、発生する電場の向きを、円筒座標系の単位ベクトル $\hat{r}$, $\hat{\phi}$, $\hat{z}$ を用い、 正負を含めて答えよ。またその理由を説明せよ。その際、図中に示した $\hat{\phi}$ 方向に垂直な長方形 S をマクスウェル方程式の積分領域として用いてもよい。

II. 次に、一般の電流密度 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t)$ の場合におけるマクスウェル方程式 (i)–(iv) の解を考えよう。ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ を用いて、電場、磁場をそれぞれ $\boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ と置く。ただし、クーロンゲージ $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$ を仮定する。

(3) 上で導入したベクトルポテンシャルによって、マクスウェル方程式のうち、(i)、(ii)、(iii) が満たされていることを示せ。任意のベクトル場 $\boldsymbol{X}$ に関する恒等式 $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{X}) = 0$ を用いてよい。

(4) ベクトルポテンシャルが、波動方程式

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = -\mu_0 \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t) \tag{v}$$

に従うことを示せ。波の位相速度 c も求めよ。任意のベクトル場 $\boldsymbol{X}$ に関する恒等式 $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{X}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{X}) - \nabla^2 \boldsymbol{X}$ を用いてよい。

III. 再び z 軸方向に電流が流れる場合を考える。具体的に、$I(t) = I\ \theta(t)$ とする。ここで I は正の定数、$\theta(t)$ は階段関数で、$\theta(t) = 0$ （$t < 0$）、 $\theta(t) = 1$ （$t > 0$）である。つまり電流は時刻 $t = 0$ まで流れていなくて、時刻 $t = 0$ から急に一定値 I で流れる。

(5) **II** で得られた波動方程式（v）の解（特解）は

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int dx'dy'dz' \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}', t - \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c})}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}$$

と表せる。ここで $\boldsymbol{r}' = (x', y', z')$ である。

上の積分を実行してベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を具体的に求めよう。この系は、z 方向に並進対称性があり、z 軸を中心とする回転対称性があるので、ベクトルポテンシャルは、z 軸からの距離 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ と時間 t にのみ依存する。xy

平面上の点 $(x, y, 0)$ におけるベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(r, t)$ を、以下の 2 つの場合 (a) $r > ct$、(b) $0 < r < ct$、に分けて求めよ。必要ならば次の積分公式を用いてよい。

$$\int dz \frac{1}{\sqrt{z^2 + a}} = \log\left(z + \sqrt{z^2 + a}\right) + C$$

ここで C は積分定数、a は正の定数である。以下では、計算過程および結果を見やすくするために $F \equiv \sqrt{1 - \left(\frac{r}{ct}\right)^2}$ を用いてよい。

(6) 上の (a)、 (b) のそれぞれの場合について磁場の大きさと向きを求めよ。磁場の向きは、円筒座標系の単位ベクトル $\hat{r}, \hat{\phi}, \hat{z}$ を用いて表せ。デカルト座標系から計算するときは、$\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ を用いて $\hat{r} = \frac{x}{r}\hat{x} + \frac{y}{r}\hat{y}$、$\hat{\phi} = -\frac{y}{r}\hat{x} + \frac{x}{r}\hat{y}$ である。

(7) 十分時間が経過したのち、**(6)** の結果は **(1)** で考えた静的な場合に一致することを示せ。

（計算用余白）
問題 3 は次ページから。

問題 3

一般の角運動量演算子 $\hat{\boldsymbol{T}} = \left(\hat{T}_x, \hat{T}_y, \hat{T}_z\right)$ に対して、互いに交換する演算子 $\hat{\boldsymbol{T}}^2$, $\hat{T}_z$ の固有値と、規格化された同時固有状態を、以下のように書くことにする。

$$\frac{\hat{\boldsymbol{T}}^2}{\hbar^2}\left|T, m_T\right\rangle = T\left(T+1\right)\left|T, m_T\right\rangle, \qquad \frac{\hat{T}_z}{\hbar}\left|T, m_T\right\rangle = m_T\left|T, m_T\right\rangle$$

以下では、$\hat{T}_\pm \equiv \hat{T}_x \pm i\,\hat{T}_y$ に対して

$$\frac{\hat{T}_\pm}{\hbar}\left|T, m_T\right\rangle = \sqrt{T\left(T+1\right) - m_T\left(m_T \pm 1\right)}\left|T, m_T \pm 1\right\rangle \tag{i}$$

であることを用いてよい。

I. 互いに交換する角運動量演算子 $\hat{\boldsymbol{L}} = \left(\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z\right)$ と $\hat{\boldsymbol{S}} = \left(\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z\right)$ を考える。これらに対する全角運動量を $\hat{\boldsymbol{J}} = \hat{\boldsymbol{L}} + \hat{\boldsymbol{S}}$ とする。このとき、$\hat{\boldsymbol{J}}^2$, $\hat{J}_z$, $\hat{\boldsymbol{L}}^2$, $\hat{\boldsymbol{S}}^2$ は互いに交換するため、同時固有状態を持てる。

$\hat{\boldsymbol{L}}$, $\hat{\boldsymbol{S}}$ の量子数 L, S が決まっているとき、全角運動量の固有状態 $\left|J, m_J\right\rangle$ は、状態 $\left|L, m_L;\, S, m_S\right\rangle \equiv \left|L, m_L\right\rangle\left|S, m_S\right\rangle$ を用いて、次のように展開できる。

$$\left|J, m_J\right\rangle = \sum_{m_L=-L}^{L}\sum_{m_S=-S}^{S}\left|L, m_L;\, S, m_S\right\rangle\left\langle L, m_L;\, S, m_S \,\middle|\, J, m_J\right\rangle$$

以下では、$L = 1$、$S = \dfrac{1}{2}$ の場合を考える。このとき、$m_J = m_L + m_S$ が最も大きな状態 $\left|J, m_J\right\rangle = \left|\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right\rangle$ を状態 $\left|L, m_L;\, S, m_S\right\rangle$ で書くと

$$\left|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle = \left|1, 1;\, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \tag{ii}$$

である。

(1) 以下の $\dfrac{\hat{L}_-}{\hbar}\left|L,\, m_L\right\rangle$、$\dfrac{\hat{S}_-}{\hbar}\left|S,\, m_S\right\rangle$ を求めよ。

$$\frac{\hat{L}_-}{\hbar}\left|1, 1\right\rangle, \quad \frac{\hat{L}_-}{\hbar}\left|1, 0\right\rangle, \quad \frac{\hat{L}_-}{\hbar}\left|1, -1\right\rangle, \quad \frac{\hat{S}_-}{\hbar}\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle, \quad \frac{\hat{S}_-}{\hbar}\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$$

［ヒント: 式 (i) を用いてよい。］

(2) $J = \dfrac{3}{2}$ の他の状態 $\left|J, m_J\right\rangle = \left|\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right\rangle$ を、状態 $\left|L, m_L;\, S, m_S\right\rangle$ による線形結合として求めよ。

［ヒント: 状態 (ii) に $\hat{J}_- = \hat{L}_- + \hat{S}_-$ を掛ければよい。］

(3) $J=\dfrac{1}{2}$ の状態 $|J,m_J\rangle=\left|\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right\rangle$ を、状態 $|L,m_L;\,S,m_S\rangle$ による線形結合として求めよ。

［ヒント: 上で求めた $J=\dfrac{3}{2}$ の $\left|\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2}\right\rangle$ 状態と直交するように、すなわち $\left\langle\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2}\middle|\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right\rangle=0$ を満たすように取ればよい。］

(4) $J=\dfrac{1}{2}$ のもうひとつの状態 $|J,m_J\rangle=\left|\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right\rangle$ を、状態 $|L,m_L;\,S,m_S\rangle$ による線形結合として求めよ。

以上のような考察を進めていくと、$L=1$（3 自由度）と $S=\dfrac{1}{2}$（2 自由度）の合成（$3\times2=6$ 自由度）では、J の取りうる最大値は $J=1+\dfrac{1}{2}$（4 自由度)、最小値は $J=1-\dfrac{1}{2}$（2 自由度）であることがわかる。一般に、$L,\,S$ の定まった部分空間においては、J の取りうる最大値は $J=L+S$、最小値は $J=|L-S|$ である。

II. セシウム原子時計を考える。セシウム原子の最外殻電子の軌道角運動量を $\widehat{\boldsymbol{L}}$、スピンを $\widehat{\boldsymbol{S}}$ とするとき、その量子数は $L=0$、$S=\dfrac{1}{2}$ である。また、セシウム原子核のスピン $\widehat{\boldsymbol{I}}$ の量子数は $I=\dfrac{7}{2}$ である。

(5) この最外殻電子の全角運動量 $\widehat{\boldsymbol{J}}=\widehat{\boldsymbol{L}}+\widehat{\boldsymbol{S}}$ に対して、量子数 J と m_J の取りうる値を全て書け。

(6) 原子の全角運動量 $\widehat{\boldsymbol{F}}=\widehat{\boldsymbol{I}}+\widehat{\boldsymbol{J}}$ に対して、量子数 F の取りうる値を全て書け。

次の核スピン-電子スピン相互作用ハミルトニアンによる超微細構造を考える。

$$\widehat{H}=\kappa\frac{\widehat{\boldsymbol{I}}\cdot\widehat{\boldsymbol{J}}}{\hbar^2} \tag{iii}$$

ただし、κ は正の結合定数とする。

(7) このハミルトニアン $\widehat{H}$ を $\widehat{\boldsymbol{F}}^2,\,\widehat{\boldsymbol{I}}^2,\,\widehat{\boldsymbol{J}}^2$ を用いて書き直せ。

(8) **(7)** の結果を用いて、異なるエネルギー準位間のエネルギー差を、κ を用いて書け。

(9) 1 秒とは、この準位間の遷移によって放出された光が、波として 9 192 631 770 回振動するのにかかる時間、として定義される。このことから κ の値を、eV 単位で、有効数字 1 桁で求めよ。なお、今年 5 月から施行された新 SI 単位系では、以下の値が定義値である。

$$2\pi\hbar=6.626\,070\,15\times10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$$
$$1\,\mathrm{eV}=1.602\,176\,634\times10^{-19}\,\mathrm{J}$$

(10) 実際の測定においてはセシウム原子に外部磁場をかける。以下、磁場の方向を z 方向と取る。磁場が弱い領域（図 1 の左側）ではハミルトニアン (iii) の固有状態 $|F, m_F\rangle$ が近似的に良いエネルギー固有状態をあたえる。磁場を $\boldsymbol{B} = 0$ から強くしていくと、磁場が 0 のときの 2 準位が、摂動ハミルトニアン $\propto \boldsymbol{B}\cdot\widehat{\boldsymbol{J}}$ によって図 1 のように分裂する。（$\boldsymbol{B}\cdot\widehat{\boldsymbol{I}}$ の寄与は無視できるほど小さい。）磁場が強い領域（図 1 の右側）では $\boldsymbol{B}\cdot\widehat{\boldsymbol{J}}$ の固有状態 $|I, m_I;\, J, m_J\rangle = |I, m_I\rangle\, |J, m_J\rangle$ が近似的に良いエネルギー固有状態をあたえる。このことから、弱い磁場、強い磁場における準位の数が図 1 のようになる理由を説明せよ。

（参考: 実際の測定では磁場が弱い領域で $m_F = 0$ の準位を用いる。）

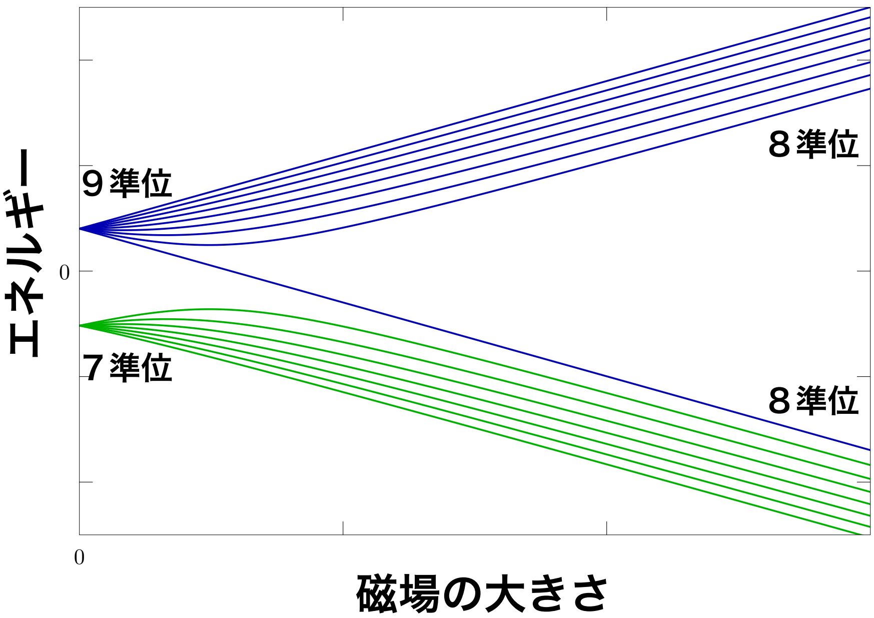

図 1

（計算用余白）
問題 4 は次ページから。

問題 4

互いに区別でき相互作用しない N 個の粒子があり、それぞれは、いくつかの離散的なエネルギー準位のみを取る。以下の **(7)** を除き、系は温度 T の熱浴と接して熱平衡状態にある。ボルツマン定数を k_{B} として、以下の問に答えよ。

I. まず、それぞれの粒子が、エネルギー $-\epsilon$ と ϵ（$\epsilon > 0$）の 2 つの状態のみを取る 2 準位系を考える。

(1) 1 粒子（$N = 1$）の場合の分配関数 Z_1 を、T の関数として求めよ。また、N 個の粒子からなる系の分配関数 Z を、T, N の関数として求めよ。

(2) 系の内部エネルギー E を、T, N の関数として求めよ。

(3) 系の比熱 C を、T, N の関数として求め、その温度依存性の概形を図示せよ。値を図中に記す必要はない。

II. 各粒子は大きさ μ の磁気モーメントを持ち、各磁気モーメントは「上向き」か「下向き」の 2 つの向きのみを取るとする。この N 粒子系が、大きさ H で上向きの一様磁場中に置かれている。上向きの磁気モーメントを持つ粒子はエネルギー $-\mu H$ を、下向きの磁気モーメントを持つ粒子はエネルギー μH を持つため、この系は **I** で扱った 2 準位系で $\epsilon = \mu H$ とした場合に相当する。

(4) 上向きの磁気モーメントを持つ粒子数の平均値 $N_{\uparrow}$、下向きの磁気モーメントを持つ粒子数の平均値 $N_{\downarrow}$ を、T, H, N の関数として求めよ。

(5) 磁化 M（各粒子の磁気モーメントの総和の平均値）を、上向きを正として、T, H, N の関数として求めよ。

(6) 系のエントロピー S を、T, H, N の関数として求めよ。

(7) 今、系と外界との熱の出入りを断って、磁場の強さをゆっくりと弱めた。このとき系の温度が低下することを、**(6)** の結果を用いて説明せよ。磁場の強さを当初の値の $\dfrac{1}{10}$ に弱めた場合、温度はどのようになるか答えよ。
（参考: このように、磁性体において磁場の強さを制御することにより温度を下げる方法を断熱消磁法とよぶ。実際の磁性体では、磁気モーメント間に存在する相互作用が重要になる場合もある。）

III. 次に、それぞれの粒子が、エネルギー 0、ϵ_1（$\epsilon_1 > 0$）、ϵ_2（$\epsilon_2 > \epsilon_1$）の 3 つの状態を取る 3 準位系を考えよう。

(8) 分配関数 Z を、T, N の関数として求めよ。

(9) 以下では、$\epsilon_2 \gg \epsilon_1$ とする。系のエントロピー S を、以下の 3 つの温度領域で、それぞれ求めよ。

(i) $k_BT \ll \epsilon_1$（$\dfrac{\epsilon_1}{k_BT} \to \infty$ としてよい）

(ii) $\epsilon_1 \ll k_BT \ll \epsilon_2$（$\dfrac{\epsilon_1}{k_BT} \to 0,\ \dfrac{\epsilon_2}{k_BT} \to \infty$ としてよい）

(iii) $k_BT \gg \epsilon_2$（$\dfrac{\epsilon_2}{k_BT} \to 0$ としてよい）

(10) $\epsilon_2 \gg \epsilon_1$ のとき、比熱 C の温度依存性の概形を図示せよ。値を図中に記す必要はない。

（計算用余白）

（計算用余白）