問題 1

質量 m の質点の運動に関する以下の問題に答えよ。ただし、相対論的効果および荷電粒子からの電磁波の放射は無視する。また $\dot{f}$ は f の時間微分 $\dfrac{df}{dt}$ を表すものとする。

I. 直交座標系 XYZ を慣性系とする。質点が、ポテンシャル $U(X,Y) = \dfrac{1}{2}m\omega_0^2(X^2+Y^2)$ の中で、XY 面内 ($Z=0$) を運動する。ただし ω_0 は正の定数とする。

(1) 質点の位置 $X(t)$ および $Y(t)$ についての運動方程式をそれぞれ求めよ。

(2) 時刻 $t=0$ において、質点が位置 $(X,Y)=(X_0,0)$ から初速度 $(\dot{X},\dot{Y})=(0,v_0)$ で打ち出された。$t \geq 0$ における $X(t),Y(t)$ を求めよ。

II. I の質点の運動を回転する座標系から見てみよう。回転系 xyz は、慣性系 XYZ と原点を共有し、慣性系に対して一定の角速度ベクトル $\boldsymbol{\Omega}=(0,0,\Omega)$ で回転している。時刻 $t=0$ で x,y,z 軸はそれぞれ X,Y,Z 軸と一致している。回転系における基底ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ $(i=x,y,z)$ は、慣性系に対して角速度ベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ で回転しているので、$\dot{\boldsymbol{e}}_i = \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{e}_i$ が成り立つ。

(3) 慣性系における質点の速度 $\boldsymbol{V}$ は、位置 $\boldsymbol{r}$ および回転系での速度 $\boldsymbol{v}$ を用いて $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}$ となることを示せ。

(4) 質点の運動に関するラグランジアンを、回転系での位置 x,y と速度 $\dot{x},\dot{y}$ 及び m,ω_0,Ω を用いて表せ。(ヒント:質点の運動エネルギーは $T=\dfrac{1}{2}m\boldsymbol{V}^2$ である。)

(5) $x(t)$ および $y(t)$ についての運動方程式をそれぞれ求めよ。運動方程式の中で、コリオリの力および遠心力に対応する項をそれぞれ書き出せ。

III. II の状況で、質点が電荷 q (>0) を持つ荷電粒子であるとし、ポテンシャル U に加え、慣性系から見て一様で小さい磁束密度 $(0,0,B)$ (B は正の定数) を与えたときの質点の運動を考える。質点は XY 面上を運動するものとする。

(6) 質点の運動方程式は、**(5)** の運動方程式にローレンツ力の項を加えたものとなる。このとき、Ω の値を適当に取ることで、ローレンツ力の $\boldsymbol{v}$ に依存する部分とコリオリの力とは互いに打ち消しあうことができる。その Ω の値を求めよ。

(7) $t=0$ で質点が原点にあり、慣性系から見て初速度 $(\dot{X},\dot{Y})=(v_0,0)$ $(v_0>0)$ で打ち出された。$t\geq 0$ における、慣性系から見た質点の位置 $X(t)$ および $Y(t)$ を求めよ。ただし磁束密度は十分に小さいので、B^2 に比例する項は無視できる。[ヒント:**(6)** で求めた Ω の回転系を用いる。]

(8) xy 面上にあり原点を中心とする半径 R の円上を、質点が円運動をする状況を考える。慣性系から見たとき、質点の運動エネルギーは、磁束密度がゼロの場合と B の場合でどれだけ異なるか（円の半径 R は共通とする)。前者を E_1, 後者を E_2 としたときの $E_2 - E_1$ の値を、q, B, m 及び質点の角運動量の z 成分 J を用いて表わせ。ただし磁束密度は十分に小さいので、B^2 に比例する項は無視できる。

（計算用余白）

（計算用余白）
問題 2 は次ページから。

問題 2

電磁波に関する以下の問いについて答えよ。

I. 真空中を x 軸の正の方向に進行し、磁束密度 $\boldsymbol{B}$ が y 方向のみに振動する電磁波があり、その y 成分は $B_y = A\sin(kx-\omega t)$ と表されるものとする。A, k, ω は正の定数、t は時間である。

(1) 電場を表すベクトル $\boldsymbol{E}$ を、B_y、真空の誘電率 ε_0、真空の透磁率 μ_0 を用いて表せ。積分定数が現れた場合はゼロとしてよい。必要があれば関係式 $\dfrac{\omega}{k} = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ や、真空中のマクスウェル方程式

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = 0\,,$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0\,,$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E} + \frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{0}\,,$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} = \boldsymbol{0}$$

を使ってよい。

(2) ポインティングベクトル $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E}\times\dfrac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}$ の大きさ $|\boldsymbol{S}|$ を、$|\boldsymbol{E}|$, ε_0, μ_0 を用いて表せ。

II. 図 1 のように媒質 1 を進む電磁波（入射波）が入射角 α で媒質 2 に入射した。その電磁波の一部は屈折角 β で媒質 2 中を進み（透過波）、一部は媒質境界面で反射角 α で反射した（反射波）。角度の関係は $\alpha > \beta$ とする。媒質 1 の誘電率、透磁率をそれぞれ ε_1, μ_1, 媒質 2 の誘電率、透磁率をそれぞれ ε_2, μ_2 とし、ε_1, μ_1, ε_2, μ_2 は実数とする。電磁波の電場成分は入射面方向（紙面平行方向）に振動しているものとし、図 1 の矢印の向きを正の向きとして表したものを、E_1（入射波）, E_2（透過波）, E_1'（反射波） とする。なお、電場の境界面に平行な成分と磁場（磁束密度ではないことに注意）の境界面に平行な成分は、境界面でそれぞれ連続する。

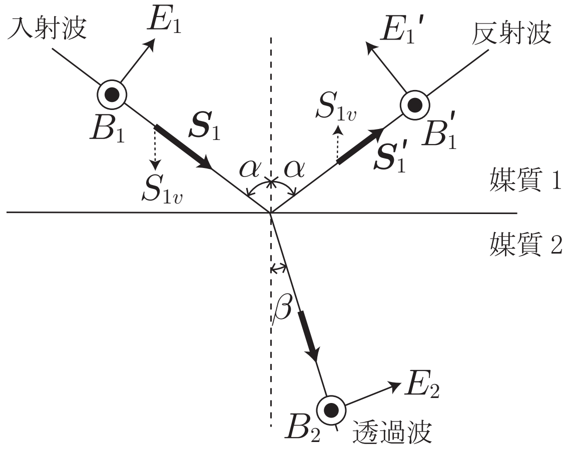

図 1

(3) E_2 を E_1, E_1', α, β を用いて表せ。

(4) 電磁波の磁束密度の入射面（紙面）垂直方向の成分を、紙面手前の向きを正として表したものを、B_1（入射波）、B_2（透過波）、B_1'（反射波）とする。このとき B_2 を B_1, B_1', μ_1, μ_2 を用いて表せ。

(5) $Z_1 = \sqrt{\dfrac{\mu_1}{\varepsilon_1}}, Z_2 = \sqrt{\dfrac{\mu_2}{\varepsilon_2}}$ としたとき、$\dfrac{E_2}{E_1}, \dfrac{E_1'}{E_1}$ をそれぞれ α, β, Z_1, Z_2 を用いて表せ。

(6) 以下、簡単のため $\mu_1 = \mu_2$ とする。この場合、相対屈折率は

$$n = \sqrt{\frac{\varepsilon_2\mu_2}{\varepsilon_1\mu_1}} = \frac{Z_1}{Z_2}$$

と表される。また、スネルの法則より $n = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ でもある。このことを利用して $\alpha = 45^\circ, \beta = 30^\circ$ のときの $\dfrac{E_2}{E_1}$ と $\dfrac{E_1'}{E_1}$ をそれぞれ有効数字 1 桁で求めよ。$\sqrt{2}$ を 1.4、$\sqrt{3}$ を 1.7 と近似してよい。

(7) $\alpha+\beta$ がある値を取るときに反射波の電場成分 E_1' がゼロになる。$0 \leq \alpha < 90^\circ$, $0 \leq \beta < 90^\circ$ としてその値を求めよ。必要があれば公式

$$\sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta = \sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$$

$$\sin\alpha\cos\alpha - \sin\beta\cos\beta = \sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)$$

を使ってよい。

III. 図 1 において、入射波、反射波のポインティングベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{S}_1$, $\boldsymbol{S}'_1$ とし、その媒質境界面に垂直な成分をそれぞれ S_{1v}, S'_{1v} とする。電磁波の反射率を

$$R = \frac{|S'_{1v}|}{|S_{1v}|}$$

と定義し、R を α の関数 $(0 \leq \alpha < 90^\circ)$ として表すと図 2 のようになる。この図は $n = 2$ のときのものだが、他の n $(1 < n \leq 2)$ の場合も傾向は同じである。

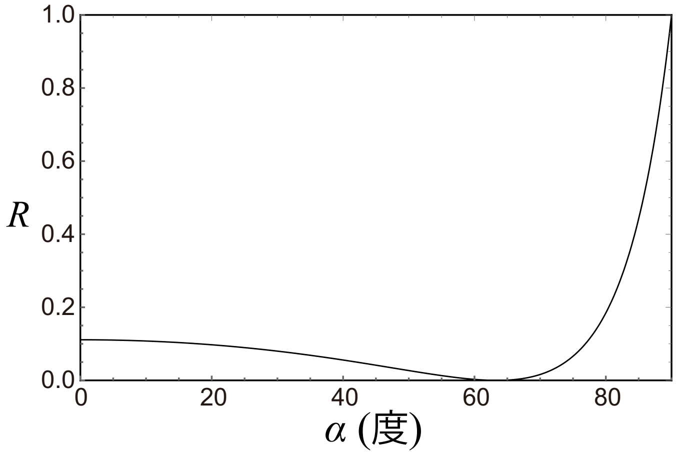

図 2

(8) 太陽光が反射して光っている水面の下の様子（魚など）を外から観察するのは一般に難しい。しかし光のうちある方向に振動する成分のみ遮断する偏光フィルター（偏光板）を使うと水の中の様子がよくわかることがある。その原理を上の図 2 などを利用して 100 字以内で簡単に説明せよ。なお太陽光に付随する電場は入射面方向だけではなく、入射面垂直方向にも振動している。

（計算用余白）
問題 3 は次ページから。

問題 3

角振動数 ω の調和振動子ポテンシャルのもとで運動する質量 m の粒子について以下の設問に答えよ。

I. 1 次元調和振動子のハミルトニアンは次のように書ける。

$$\hat{H} \equiv \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2}$$

$\hat{p}$, $\hat{x}$ は、それぞれ、運動量、位置の演算子で、交換関係 $[\hat{x}, \hat{p}] = \mathrm{i}\hbar$ を満たす。ここで、$\mathrm{i} \equiv \sqrt{-1}$ は虚数単位であり、$\hbar \equiv \dfrac{h}{2\pi}$ である。ここで h はプランク定数 である。

(1) 消滅演算子を、

$$\hat{a} \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + \mathrm{i}\frac{\hat{p}}{m\omega}\right)$$

で定義する。この時、$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$ を求めよ。($\hat{a}^\dagger$ は、生成演算子と呼ばれる。)

(2) 生成・消滅演算子を使うと、ハミルトニアンは、

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)$$

と書ける。ここで、ケット $|0\rangle$ を

$$\hat{a}|0\rangle = 0$$

で導入する。正またはゼロの任意の整数 $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して、

$$|n\rangle \equiv (\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle$$

は、$\hat{H}$ の固有状態（規格化されていない）である事を示し、そのエネルギー固有値を求めよ。

II. 3 次元調和振動子のハミルトニアンは次のように書ける。

$$\hat{H} \equiv \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\hat{p}_i^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}_i^2}{2}\right) \tag{i}$$

$\hat{p}_i$, $\hat{x}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ はそれぞれ x, y, z 軸方向の運動量演算子と座標演算子であり、交換関係 $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = \mathrm{i}\hbar\delta_{ij}$ を満たす。

(3) 各座標軸方向に消滅演算子を

$$\hat{a}_i \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x}_i + \mathrm{i}\frac{\hat{p}_i}{m\omega}\right)$$

で導入し（$i = 1, 2, 3$）、ケット $|0\rangle$ を

$$\hat{a}_1|0\rangle = \hat{a}_2|0\rangle = \hat{a}_3|0\rangle = 0$$

で導入する。$\hat{H}$ の全ての固有状態（規格化しなくてよい）と、対応するエネルギー固有値を求めよ。以後、$\hat{H}$ の固有エネルギーは、下から $E_0 < E_1 < E_2 < \cdots$ と呼ぶ事とする。

(4) 軌道角運動量の演算子を

$$\hat{L}_i \equiv \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\hat{x}_j\hat{p}_k$$

で定義する。ここで、ϵ_{ijk} は、レビ・チビタ記号、要するに $\epsilon_{123} = 1$ を満たす 3 階完全反対称テンソルである。$\hat{L}_i$ を生成・消滅演算子で表し直す事によって、$\hat{L}_i|0\rangle = 0$ を示し、$\hat{H}$ の最小のエネルギー固有値 $E = E_0$ を持つ状態の軌道角運動量 l を求めよ。（状態 $|\psi\rangle$ の軌道角運動量が l であるとは、$\sum_{i=1}^{3}\hat{L}_i^2|\psi\rangle = \hbar^2 l(l+1)|\psi\rangle$ を満たすことをいう。）

(5) $\hat{H}$ の固有状態の軌道角運動量を考えるため、次の交換関係を導け。

$$\begin{aligned}
\left[\hat{L}_i, \hat{a}_j^\dagger\right] &= \mathrm{i}\hbar\sum_{k=1}^{3}\epsilon_{ijk}\hat{a}_k^\dagger \\
\sum_{i=1}^{3}\left[\hat{L}_i, \left[\hat{L}_i, \hat{a}_j^\dagger\right]\right] &= 2\hbar^2\hat{a}_j^\dagger
\end{aligned}$$

(6) 上記の結果を使って、$\hat{H}$ のエネルギー固有値 $E = E_1$ を持つ状態について、可能な軌道角運動量 l を列挙せよ。

III. 3 次元空間のポテンシャル

$$V(\boldsymbol{x}) = \frac{m\omega^2}{2}\boldsymbol{x}^2$$

に、質量 m でスピン $\frac{1}{2}$ の 2 個の同種フェルミ粒子が束縛されている。ここで、$\boldsymbol{x} \equiv (x, y, z)$ である。フェルミ粒子間の相互作用は弱いとして無視し、以下の設問に答えよ。

(7) 基底状態と第一励起状態それぞれについて、粒子の配位を示し（要するに、2 個の粒子を設問 II で議論した空間軌道（式 (i) の $\hat{H}$ の固有状態）にどのように詰めるか説明し）、固有エネルギーを求めよ。

(8) 基底状態と第一励起状態それぞれについて、可能な全角運動量 J をすべて列挙せよ。（状態 $|\psi\rangle$ の全角運動量が J であるとは、全角運動量演算子を $\hat{J}_i$ とした時、$\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\hat{J}_i^2|\psi\rangle = \hbar^2 J(J+1)|\psi\rangle$ を満たす事を言う。ここで、全角運動量演算子 $\hat{J}_i$ は、2 つの粒子の軌道角運動量演算子 $\hat{L}_i^{(1)}, \hat{L}_i^{(2)}$ とスピン演算子 $\hat{S}_i^{(1)}, \hat{S}_i^{(2)}$ の和である。[右肩の括弧内の数字は一番目と二番目の粒子に対応するものとする。]）

（計算用余白）
問題 4 は次ページから。

問題 4

I. まず、一般の物質の断熱変化に関して考察しよう。物質の温度を T、体積を V、内部エネルギーを U、圧力を P とする。物質の粒子数 N は変化しないとする。

(1) 物質の定積比熱 C_V は、独立変数として T, V をとると、

$$C_V = \frac{\partial U(T,V)}{\partial T}$$

である。物質の準静的な断熱変化では、熱力学第一法則より、

$$0 = \mathrm{d}U + P\mathrm{d}V$$

が成立する。U を T と V の関数と考え、この式を変形することで、

$$0 = C_V \mathrm{d}T + \boxed{\text{(A)}}\, \mathrm{d}V \tag{i}$$

である。$\boxed{\text{(A)}}$ に入る数式を、P, $U(T,V)$ およびこれらの微分のうち必要なものを用いて表わせ。

(2) 物質の定圧比熱 C_P は、独立変数として T, P をとると、

$$C_P = \frac{\partial U(T,P)}{\partial T} + P\frac{\partial V(T,P)}{\partial T}$$

である。このとき、

$$C_P - C_V = \boxed{\text{(B)}} \tag{ii}$$

$\boxed{\text{(B)}}$ に入る数式を、P, $U(T,V)$, $V(T,P)$ およびこれらの微分のうち必要なものを用いて表わせ。

(3) 式 (i) と式 (ii) より、

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}V} = \boxed{\text{(C)}} \tag{iii}$$

$\boxed{\text{(C)}}$ に入る数式を、C_P, $C_V, V(T,P)$ およびこれらの微分のうち必要なものを用いて表わせ。式 (iii) が、一般の物質の断熱変化における温度と体積の関係を示す式である。

理想気体の場合は、ボルツマン定数を k として、状態方程式 $PV = NkT$ が成立する。このとき、$\dfrac{\partial V(T,P)}{\partial T} = \dfrac{Nk}{P} = \dfrac{V}{T}$ である。これを式 (iii) に用いて積分すると、有名な

$$TV^{\gamma-1} = 一定$$

という法則が得られる。ここで、$\gamma = \dfrac{C_P}{C_V}$ は比熱比である。

II. ピストンのついた容器に粒子数 N の理想気体を入れ、カルノーサイクルを行う。図 1 は、その 圧力–体積図である。まず容器を絶対温度 T_{H} の熱源に接触させたまま、体積 V_1 から体積 V_2 へと準静的に等温膨張させる (過程 $1 \to 2$)。次に、熱源から切り離し、温度 $T_{\mathrm{L}}(< T_{\mathrm{H}})$ になるまで準静的に断熱膨張させる (過程 $2 \to 3$)。状態 3 で理想気体の体積は V_3 である。次に、温度 T_{L} の熱源に容器を接触させたまま、準静的に体積 V_3 から体積 V_4 へと等温圧縮する (過程 $3 \to 4$)。最後に、熱源から切り離し、温度が T_{H} になるまで準静的に断熱圧縮する (過程 $4 \to 1$)。

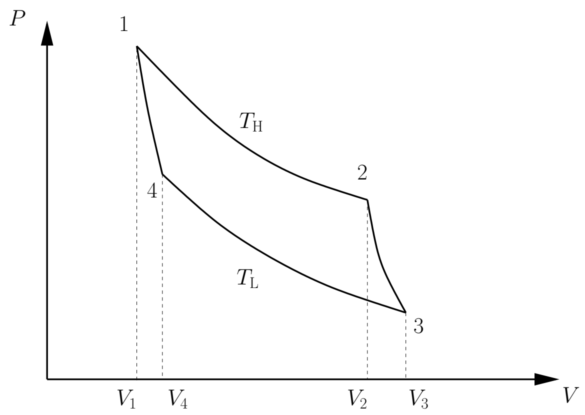

図 1

(4) 過程 $1 \to 2$ で理想気体が吸収する熱 Q を、$T_{\mathrm{H}}, V_1, V_2, k, N$ を用いて表わせ。

(5) V_3 を $T_{\mathrm{H}}, T_{\mathrm{L}}, V_2, \gamma$ を用いて表わせ。

(6) 過程 $1 \to 2$、および過程 $2 \to 3$ で理想気体が吸収するエントロピー $S_{1\to2}$、$S_{2\to3}$ を、$Q, T_{\mathrm{H}}, T_{\mathrm{L}}, V_1, V_2, V_3$ のうち必要なものを用いて表わせ。

(7) 圧力–体積図において、閉曲線 $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$ で囲まれた領域の面積 W を、$Q, T_{\mathrm{H}}, T_{\mathrm{L}}$ を用いて表わせ。

ヒント: サイクルを一周すると、理想気体は全く同じ状態に戻るので、全ての状態変数は元の値に戻る。

III. 圧縮すると気体から液体になる物質をピストンのついた容器に入れて、カルノーサイクルを行う。図 2 はその圧力–体積図である。状態 1 では、物質は温度 T、体積 V_{L} で液体状態にある。容器を温度 T の熱源に接触させながら、準静的にピストンを引っ張り等温膨張させて、液体状態にある物質を徐々に蒸発させる (過程 $1 \to 2$)。状態 2 で全ての物質が気体状態になり、体積は V_{G} となる。次に熱源と切り離し、物質を準静的に断熱膨張させ、圧力を $P - \Delta P$、温度を $T - \Delta T$ とする (過程 $2 \to 3$)。ここで、$\Delta P,\ \Delta T$ は正の微小量であり、$0 < \Delta P \ll P,\ 0 < \Delta T \ll T$ である。次に温度 $T - \Delta T$ の熱源に接触させつつ物質を準静的に等温圧縮する (過程 $3 \to 4$)。最後に熱源から切り離し、物質を断熱的に圧縮して、状態 1 に戻す (過程 $4 \to 1$)。

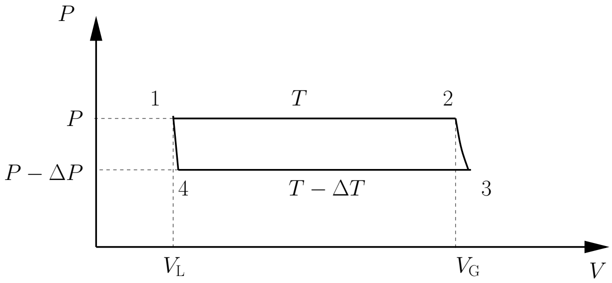

図 2

(8) 過程 $1 \to 2$、過程 $3 \to 4$ では、容器内には気体と液体が混在しており、気体の圧力は一定である。その圧力は温度のみに依存する。この圧力を何と呼ぶか答えよ。

(9) 一般に液体は、少し圧縮するだけで大きく圧力が変化する。従って状態 4 と状態 1 の体積は等しいと考えてよい。また、過程 $2 \to 3$ も微小変化であり、状態 2 と状態 3 の体積も等しいと考えてよい。問 (7) で求めた関係は、今回のカルノーサイクルにも適用できる。過程 $1 \to 2$ で物質が吸収する熱量を Q として、ΔP を $Q, V_{\mathrm{G}}, V_{\mathrm{L}}, T, \Delta T$ を用いて表わせ。

(10) 容器内の物質として、1 g の水を考える。過程 $1 \to 2$ の温度を 300 K にすると、圧力は $3.57 \times 10^3\ \mathrm{N\ m^{-2}}$ で、過程 $3 \to 4$ の温度を 299 K にすると、圧力は $3.36 \times 10^3\ \mathrm{N\ m^{-2}}$ である。また、水の場合は $V_{\mathrm{G}} \gg V_{\mathrm{L}}$ であり、$V_{\mathrm{G}} - V_{\mathrm{L}} \sim V_{\mathrm{G}}$ と近似できる。さらに、V_{G} は近似的に理想気体の状態方程式を用いて求めることができる。これまでの結果を用いて、温度 300 K における水 1 g の蒸発熱 (潜熱) を有効桁数 1 桁で求めよ。水の分子量は 18、ボルツマン定数は $k = 1.4 \times 10^{-23}\ \mathrm{J\ K^{-1}}$、アボガドロ数は $N_{\mathrm{A}} = 6.0 \times 10^{23}$ とせよ。

（計算用余白）