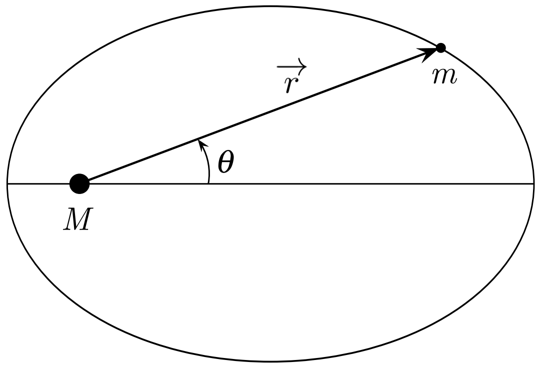
問題 1

質量 M の太陽と質量 m の小天体の運動について考える。小天体の位置ベクトルを $\vec{r}$、小天体が太陽から受ける万有引力を $\vec{F}(\vec{r})$、万有引力定数を G として以下の問に答えよ。ただし、$M \gg m$ として、太陽は座標の原点で静止していると近似してよい。また、太陽と小天体のサイズは無視し、質点と近似してよい。



(1) $\vec{F}(\vec{r})$ が中心力であることを用いて、小天体は太陽を含む 2 次元平面内を運動することを示せ。

(2) 図に示されているように、小天体が運動する 2 次元平面において、太陽を原点とする極座標を与え、動径を $r = |\vec{r}|$、角度を θ とする。時刻を t とし、物理量 h を $h = r^2 \dfrac{d\theta}{dt}$ と定義するとき、h が保存することを示せ。

(3) 全エネルギー E を、r とその時間微分および h を用い、θ とその時間微分は用いずに表せ。ただし、万有引力による位置エネルギーは無限遠でゼロとする。

(4) E の値として許される最小の値 E_0 を h を用いて表せ。

(5) E が条件 $E_0 < E < 0$ を満たすとき、r の最大値 r_1 と最小値 r_2 を h と E を用いて表せ。

(6) E が条件 $E < 0$ を満たすとき、小天体の運動エネルギー $K(\vec{r})$ の長時間平均が、係数 A と $\vec{r}$ と $\vec{F}(\vec{r})$ を用いて

$$\langle K(\vec{r})\rangle = A\langle \vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r})\rangle$$

と表されることを導き、さらに A の値を求めよ。なお、物理量 B の長時間平均 $\langle B\rangle$ は、以下のように与えられる。

$$\langle B\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T B(t)dt$$

(7) E が条件 $E < 0$ を満たすとき、E は係数 C と $K(\overrightarrow{r})$ を用いて

$$E = C\langle K(\overrightarrow{r})\rangle$$

と表されることを導き、さらに C の値を求めよ。

(8) E が $E \geq 0$ のとき、小天体がどのような運動をするのか、その概要を定性的に述べよ。さらに E を $\langle K(\overrightarrow{r})\rangle$ を用いて表せ。

（計算用余白）

（計算用余白）
問題 2 は次ページから。

問題 2

宇宙空間の様々な場所には、電離した気体、プラズマが満ちている。プラズマ中を伝搬する電磁波は、プラズマと相互作用する。遠方の天体から放射される電磁波は、我々に届く間に通過するプラズマによって変調を受ける。逆に、電磁波の観測から、宇宙空間に存在するプラズマの物理量を推定することもできる。ここでは、単純化した条件のもとで、プラズマを通過する電磁波を考えよう。

I. 陽子と電子だけからなる完全に電離したプラズマを考える。電子と陽子の個数密度はともに n とする。陽子は静止しているとして、電磁波の電場 $\overrightarrow{E}$ と磁場 $\overrightarrow{B}$ によって電子だけが動くものとし、電磁波の波長は十分長いものとする。また、粒子間の衝突は無視する。電子の質量は m、電荷は $-e$ とする。

(1) 電子の速度を $\overrightarrow{v}$ として、電子の運動方程式を書け。

(2) 電磁波の角振動数を ω として、ある場所での時刻 t での電場が $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_0}e^{-i\omega t}$、磁場が $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{B_0}e^{-i\omega t}$ で表せるものとする。電子の速度 $\overrightarrow{v}$ を、$\overrightarrow{E}$, $\overrightarrow{B}$, ω, m, e から必要な文字を使って表せ。ここで電磁波の性質により $|\overrightarrow{B_0}| \simeq \frac{|\overrightarrow{E_0}|}{c}$ であり、電子の速度の大きさ v は真空中の光速度 c に比べて十分小さいことを用いよ。電子は電磁波がない場合には静止しているものとする。答は複素数表示のままでよい。

(3) 電子が速度をもって移動することで、電流が生じる。問 **(2)** で求めた結果を用いて電流密度 $\overrightarrow{j}$ を表せ。

(4) このプラズマ中でのマクスウェル方程式は、

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{E} = 0,\ \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{B} = 0,\ \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t},\ \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{j} + \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$$

と書ける。ここで、ϵ_0, μ_0 は、それぞれ、真空の誘電率と透磁率で、$\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = c$ である。これらを使用して、

$$\overrightarrow{\nabla}^2 \overrightarrow{E} - \boxed{ア} \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} - \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} = 0$$

という形に変形できることを、$\boxed{ア}$ に入れるべき文字式とともに示せ。ここで、任意のベクトル $\overrightarrow{A}$ に関して、$\overrightarrow{\nabla} \times (\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A}) = \overrightarrow{\nabla}(\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A}) - \overrightarrow{\nabla}^2 \overrightarrow{A}$ が成り立つことを利用してよい。

(5) プラズマ内を x 方向に $\overrightarrow{E} = (0, 0, E_0 e^{i(kx-\omega t)})$ で電場が記述される電磁波が伝搬するとする。ここで k は波数である。これを上の式に代入して、プラズマ中での電磁波の分散関係 (ω と k の関係）が、

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{\omega^2}\right)$$

の形に書けることを示し、さらに、ω_{p}（プラズマ角振動数と呼ぶ）の表式を与えよ。ただし、ω, ω_{p} は正とする。

II. 問 **(5)** で導いた、プラズマ中を伝搬する電磁波の分散関係を参照し、以下の問に答えよ。

(6) 電磁波の角振動数 ω がプラズマ角振動数 ω_{p} より小さい場合に、プラズマに入射した電磁波に関してどのような現象が期待されるか。$\omega \ll \omega_{\mathrm{p}}$ の場合に、その現象が起こる空間スケールを含めて説明せよ。

(7) あるタイミングでパルス状の電磁波（波束）を放射する天体を考える。放射は様々な周波数の電磁波を含んでいるが、一個のパルスの継続時間は電磁波の周期に比べて十分長いとする。この電磁波が、この天体と我々の間にある、電子と陽子の個数密度が n、厚さ d のプラズマを通過する場合を考える。このプラズマ中で、中心角振動数 ω のパルスが伝搬する速度を記せ。ただし、$\omega \gg \omega_{\mathrm{p}}$ の場合を考え、$\omega_{\mathrm{p}}/\omega$ の 2 次の項まで取る近似を使用すること。
ヒント：一般に波動の伝わる速度には、ω/k で表せる位相速度と、$d\omega/dk$ で表せる群速度がある。

(8) 問 **(7)** の条件のもと、この天体を、角振動数 ω_0 の電磁波を受ける望遠鏡と、その 2 倍、$2\omega_0$ の角振動数の電磁波を受ける望遠鏡の二台の望遠鏡で同時に観測した。$2\omega_0$ 用の望遠鏡がパルスを受けてから、ΔT だけ遅れて ω_0 用の望遠鏡がパルスを検出した。この観測結果から、nd を推定する式を求めよ。

(計算用余白)

(計算用余白)

問題 3 は次のページから

問題 3

水素原子やアルカリ金属の原子のように、最外殻に一つだけ電子をもつような原子について考えてみよう。ここでは、最外殻の電子を、原点に静止した原子核と閉殻の電子が作る中心力ポテンシャルの中を運動する一つの電子という模型を用いて記述し、その量子力学的性質を調べてみよう。電子の電荷を $-e$、電子の質量を m、プランク定数を 2π で割ったものを $\hbar$ として以下の問に答えよ。他に必要な物理定数がある場合には、各自定義して答えよ。

I. まず、水素原子について、電子のスピンを無視して考えよう。電子は原子核からのクーロンポテンシャルのみを受けて運動するとしよう。

(1) 基底状態の規格化されていない波動関数は、原点からの距離 r のみに依存し、a を長さの次元をもつ定数として

$$\psi_1(r) = \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$$

と書けることが知られている。定数 a と基底状態のエネルギー固有値 E_1 をそれぞれ求めよ。

II. 次に、一般の中心力ポテンシャル $V(r)$ の中を運動する電子の軌道角運動量演算子 $\overrightarrow{L}$ について考えよう。ここでは、まだ電子のスピンは無視する。

(2) 電子の軌道角運動量が保存することを示せ。

(3) 直交座標を (x, y, z) とし、極座標 (r, θ, ϕ) を

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\cos\theta$$

となるように導入する。
$\overrightarrow{L}$ の z 成分 L_z を、極座標による位置表示の微分演算子として表せ。（ヒント：極座標での微分演算子を直交座標で表してみよ。）

(4) 問 **(3)** の結果を用いて、L_z の固有値がどのような値を取りうるかを説明せよ。

III. 最後に、電子のスピンの効果を取り入れ、スピンと軌道角運動量の相互作用によるエネルギー準位の分裂について考えよう。スピンを無視したハミルトニアンを H_0 とし、H_0 の同一のエネルギー固有値をもつ縮退した状態に注目する。この状態の軌道量子数（方位量子数）を ℓ とすると、スピンと軌道角運動量による $2(2\ell+1)$ 重の縮退がある。これ以外の縮退はないものとする。スピンと軌道角運動量の相互作用を摂動として取り入れることを考える。全ハミルトニアンを

$$H = H_0 + H_{LS}$$

とする。H_{LS} は、軌道角運動量演算子 $\overrightarrow{L}$ と電子のスピン演算子 $\overrightarrow{S}$ を用いて

$$H_{LS} = \lambda g(r) \overrightarrow{L} \cdot \overrightarrow{S}$$

と与えられる。ただし、λ は小さい定数で、$g(r)$ はポテンシャルの形などから決まる、ある r の関数である。電子の全角運動量演算子を $\overrightarrow{J} = \overrightarrow{L} + \overrightarrow{S}$ とする。

(5) $\overrightarrow{L} \cdot \overrightarrow{S}$ を $\overrightarrow{L}^2, \overrightarrow{J}^2, \hbar$ のうち必要なものを用いて表せ。

(6) $\ell \geq 1$ の場合、スピンと軌道角運動量の相互作用により、$2(2\ell + 1)$ 重縮退していた状態は、二つの準位に分かれる。これら二つの準位の縮退度をそれぞれ求めよ。

(7) λ について一次までの摂動論を用いて、問 **(6)** の二つの準位のエネルギーの差を求めよ。必要なら $g(r)$ の非摂動状態での期待値 $\langle g(r) \rangle$ を用いよ。

（計算用余白）

（計算用余白）
問題 4 は次ページから。

問題 4

調和振動子系の比熱に関して、以下の問に答えよ。ボルツマン定数を k_{B}、プランク定数を h、$\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ とする。

I. 1 次元方向に振動する調和振動子が一個ある。振動子の質量を m、バネの固有角振動数を ω_0、平衡位置からの変位を u とすると、そのポテンシャルエネルギーは $\dfrac{m\omega_0^2}{2}u^2$ で与えられる。この調和振動子が温度 T の熱浴と接して熱平衡状態にある。

(1) まず、振動子が古典的に扱えるとして、古典統計力学を適用しよう。分配関数 Z を計算せよ。積分公式 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$, $(a > 0)$ を用いてよい。

(2) 比熱 C を計算せよ。さらに、$\dfrac{C}{k_{\mathrm{B}}}$ を $\dfrac{k_{\mathrm{B}}T}{\hbar\omega_0}$ の関数として、その概形を図示せよ。

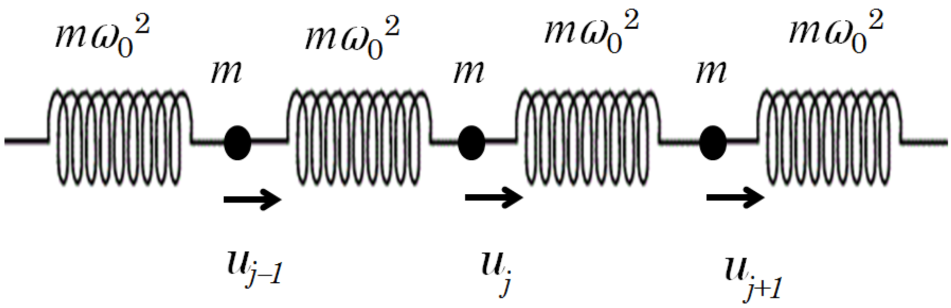
(3) 次に、振動子を量子力学的に扱い、量子統計力学を適用しよう。調和振動子のエネルギー準位は、n を非負の整数 $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ として、$(n + \frac{1}{2})\hbar\omega_0$ で与えられる。分配関数 Z を計算せよ。

(4) 比熱 C を計算せよ。さらに、$\dfrac{C}{k_{\mathrm{B}}}$ を $\dfrac{k_{\mathrm{B}}T}{\hbar\omega_0}$ の関数として、その概形を図示せよ。

II. 1 次元方向に振動する質量 m の N 個の質点が、バネ定数 $m\omega_0^2$ のバネで直線的につながった、図に示すような 1 次元調和振動子系を考える。j 番目の質点の平衡位置からの変位を u_j $(j = 1, 2, \cdots, N)$ とすると、系のポテンシャルエネルギーは

$$\frac{m\omega_0^2}{2}\sum_{j=1}^{N}(u_{j+1} - u_j)^2$$

で与えられる。周期境界条件 $u_{N+1} = u_1$、$u_0 = u_N$ を仮定する。系全体の重心は静止しているものとする。



(5) まず振動子系の運動を古典的に考えよう。u_j に対する運動方程式を書け。

(6) この系の固有振動を求めるため、$u_j = a_k e^{i(kj-\omega t)}$ とおく。独立な固有振動を与える可能な k の全ての値を与えよ。

(7) 角振動数 ω を k の関数として求めよ。N が十分大きいとき、$0 < k \ll 1$ での表式を与えよ。

(8) この 1 次元調和振動子系が温度 T の熱浴と接して熱平衡状態にある。系を量子力学的に扱い、問 **(6)(7)** で求めた各固有振動が独立な調和振動子とみなせることを用いて、低温 $k_{\mathrm{B}}T \ll \hbar\omega_0$ での比熱を計算せよ。低温比熱は T にどのように依存するか、説明せよ。N は十分大きいとしてよい。

III. **II.** で扱った 1 次元調和振動子系を d 次元 $(d = 1, 2, 3, \dots)$ に拡張しよう。d 次元の立方格子の各格子点上に平衡位置をもつ質量 m の質点が N 個あり、最近接格子点上の質点とバネ定数 $m\omega_0^2$ のバネでつながっている。j 番目の質点の d 次元変位ベクトルを $\vec{u}_j$、その最近接格子点 j' の変位ベクトルを $\vec{u}_{j'}$ とすると、両質点を結ぶバネのポテンシャルエネルギーは、$\dfrac{m\omega_0^2}{2}(\vec{u}_j - \vec{u}_{j'})^2$ で与えられる。

(9) この d 次元調和振動子系が温度 T の熱浴と接して熱平衡状態にある。系を量子力学的に扱い、低温 $k_{\mathrm{B}}T \ll \hbar\omega_0$ での比熱が T にどのように依存するか求めよ。N は十分大きいとしてよい。この問では、低温比熱の T 依存性を表す関数形に着目し、係数については正確に計算する必要はない。

（計算用余白）

（計算用余白）