問題1

水平な粗い床（動摩擦係数 μ）上に置かれた、半径 a、質量 M の密度が一様な球を、玉突き棒で突いた際の球の運動を考える。玉突き棒は、球の中心を含む鉛直面内において水平に球を突くものとし、棒の太さは無視する。また、球は常に床に接しながら運動し、球の重心速度 v と球の中心まわりの回転角速度 ω は、それぞれ図1の矢印の向きを正とする。重力加速度の大きさを g、球を突いた時刻 t を $t=0$ とする。

(1) この球の中心軸に関する慣性モーメント I は、$I=\dfrac{2}{5}a^2M$ であることを示せ。

(2) 図1のように、球の中心の高さに位置する球面上の点を玉突き棒で突き、回転を加えずに初速度 v_0 (>0) を与えて滑らせた。以下の (a)-(e) に答えよ。なお、解答では、a, g, M, t, v_0, μ のうち必要なものを用いること。

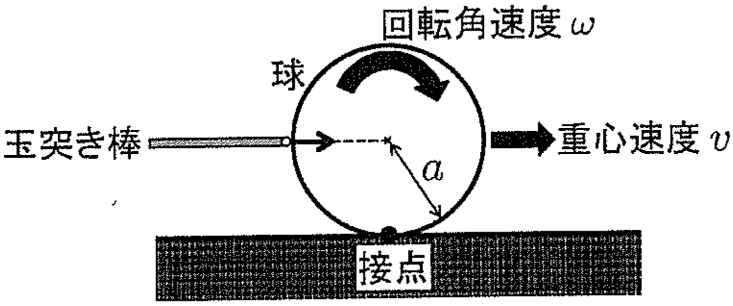


図1　球の中心の高さに位置する球面上の点を玉突き棒で突く場合。

(a) 玉突き棒で球を突いた直後から、球は摩擦力により回転を始め、ある時刻 T までは滑りながら前進する。$t \leq T$ のとき、球の重心運動と中心まわりの回転運動に関する運動方程式は、次のように表される。空欄 $\boxed{(あ)}$、$\boxed{(い)}$ に当てはまる数式を答えよ。

$$
\begin{aligned}
M\frac{dv}{dt} &= \boxed{(あ)} \\
I\frac{d\omega}{dt} &= \boxed{(い)}
\end{aligned}
$$

(b) 上式を解くことにより、$t \leq T$ における v と ω を求めよ。

(c) 球と床の接点におけるすべりの速度 u は、

$$u = v - a\omega$$

で与えられる。球が滑らず転がる条件は $u = 0$ であることに着目し、時刻 T を求めよ。また $t = T$ における球の重心速度は v_0 の何倍か。

(d) $t > T$ における v と ω を求めよ。

(e) 時刻 T までの、摩擦力による仕事の大きさを求めよ。

以下では、球面上の任意の点を玉突き棒で突き、水平方向の撃力を球に与える場合の運動を考える。この撃力による力積の大きさを P とし、衝突時間は無視できるものとする。

(3) 図 2 のように、球の中心から上方へ h $(0 < h < a)$ の位置にある球面上の点を玉突き棒で突く場合、以下の (a)-(b) に答えよ。なお、解答では、a, h, M, P のうち必要なものを用いること。

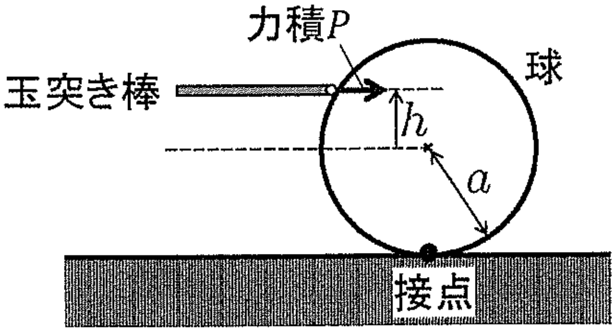


図 2　球の中心から上方へ h の位置にある球面上の点を玉突き棒で突く場合。

(a) 玉突き棒からの撃力により与えられる運動量と角運動量に着目し、球の重心運動の初速度 v_1、および中心まわりの回転運動の初角速度 ω_1 を求めよ。

(b) $h = h_1$ のとき、球は初めから滑らずに転がった。h_1 を求めよ。

(4) 図 3 のように、球の中心から下方へ l $(0 < l < a)$ の位置にある球面上の点を玉突き棒で突く場合、以下の (a)-(b) に答えよ。なお、解答では、a, g, l, M, P, μ のうち必要なものを用いること。

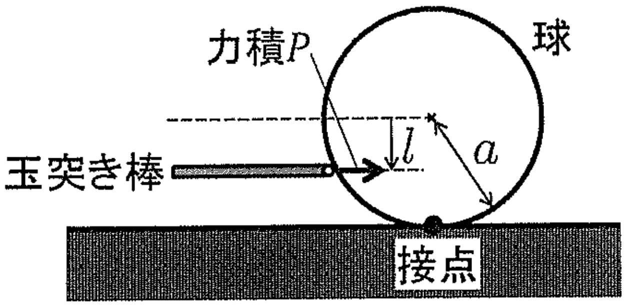


図 3　球の中心から下方へ l の位置にある球面上の点を玉突き棒で突く場合。

(a) 玉突き棒で球を突いた直後、球は回転角速度が負（バックスピン状態）のまま、滑りながら前進する。このときの運動方程式が、問 (2)-(a) と同じになることに着目し、球が滑らずに転がり始めるときの重心速度を求めよ。

(b) 最終的に球が元の位置に戻ってくることは可能か。可能な場合には l の条件を求め、不可能な場合にはその理由を簡潔に記せ。

問題2

加熱された物質表面から電子が放出される現象を熱電子効果と呼ぶ。この現象は、J. J. トムソンの電子の発見に用いられて以降、真空管技術、加速器技術などに応用され、物理学の発展において重要な役割を果たしてきた。ここでは、熱電子の運動について考えてみよう。以下では、電子の電荷を $-e$ $(e>0)$、電子の質量を m とする。

I. 磁場中における熱電子の運動について考えてみよう。

図1のように、十分に大きい面積をもつ平面状の導体極板を2枚用意し、距離 d だけ離して平行に置く。それぞれを陽極と陰極として用いることとし、両極間に V_p $(V_p>0)$ の電圧を印加する。極板間は真空である。

極板間に一様な磁場 B $(B>0)$ を印加する。磁場の向きを z 軸の正の向き（紙面に垂直で表から裏向き方向）とし、図1のように座標をとる。時刻 $t=0$ において、初速0の熱電子が、ただ一つだけ、陰極上の原点 $(x,y)=(0,0)$ に放出されたとしよう。熱電子は極板間の xy 平面内を運動する。時刻 t における熱電子の位置を (x,y)、速度を $(v_x,v_y)\equiv\left(\dfrac{dx}{dt},\dfrac{dy}{dt}\right)$ として以下の問いに答えよ。ただし、熱電子自らが作り出す電場や磁場の影響については考えないこととする。

(1) 放出された熱電子が陽極に到達することがなく、運動を続ける、という条件のもとで、熱電子の x 方向および y 方向の運動方程式を求めよ。運動方程式は、m, V_p, d, B, e, v_x, v_y, $\dfrac{dv_x}{dt}$, $\dfrac{dv_y}{dt}$ のうち、必要な記号を用いて表せ。

(2) 問 (1) の条件のもとで、初期条件を考慮して運動方程式を解き、時刻 t における熱電子の速度 (v_x,v_y) を求めよ。

(3) 問 (1) の条件のもとで、初期条件を考慮することによって、時刻 t における熱電子の位置 (x,y) を求めよ。

(4) 熱電子が陽極に到達する場合に、V_p が満たすべき条件を求めよ。

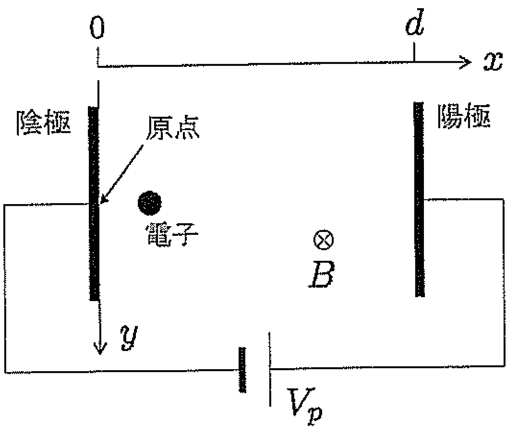


図1

II. 次に、陰極から多数の熱電子が放出されることによって生み出される電流の振る舞いを考えてみよう。

図2のように、十分に大きい面積をもつ平面状の導体極板を2枚用意し、距離dだけ離して平行に置く。それぞれを陽極と陰極として用いることとし、両極間にV_p ($V_p > 0$)の電圧を印加する。極板間は真空であり、磁場は印加されていない。

陰極の温度が十分に高い場合、陰極から初速0の熱電子をいくらでも取り出すことができる。その結果として、両極板の間に定常電流が流れているものとしよう。ただし、極板の端の影響は考えず、電場は極板に垂直であり、陰極から放出された全ての電子が陽極に向かってまっすぐに進むとする。また、電流が生み出す磁場の影響は考えないことにする。

以上の条件のもとでは、この問題を1次元の問題として扱うことができる。図2のように、陰極から陽極に向かってx軸をとり、陰極と陽極の位置をそれぞれ$x = 0$、$x = d$とする。また、点xにおける、単位長さあたりの電荷密度を$\rho(x)$、電子の速度を$v(x)$、電位を$V(x)$とする。$\rho(x) \leq 0$である。$V(0) = 0$、$V(d) = V_p$とおく。電流密度をJ、真空の誘電率をεとして、以下の問いに答えよ。

(5) 定常状態では、Jはxに依存しない定数である。その理由を簡潔に述べよ。

(6) Jを$\rho(x)$と$v(x)$を用いて表せ。ただし、Jの符号は、陽極から陰極に向かう方向を正とせよ。

(7) エネルギー保存則に注目して、$V(x)$と$v(x)$の関係を求めよ。

(8) $\rho(x)$と$V(x)$の間には、ポアソン方程式$\dfrac{d^2V}{dx^2} = -\dfrac{\rho}{\varepsilon}$が成り立つ。このポアソン方程式と、問(6)および問(7)で得られた2つの関係式を用いることによって、Vと$\dfrac{d^2V}{dx^2}$との間に成り立つ関係式を、J, ε, e, mを用いて表せ。

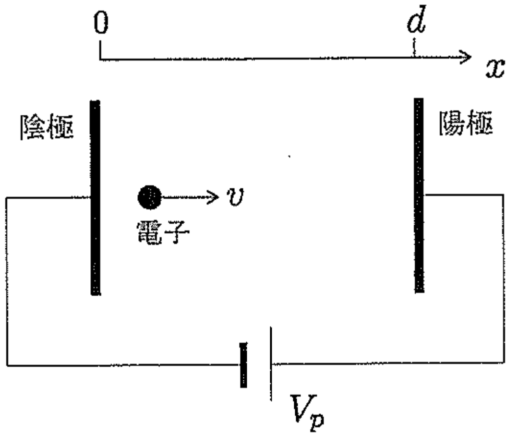


図2

(9) 問 (8) で得られた関係式から、V と $\dfrac{dV}{dx}$ との間に成り立つ関係式を、J, ε, e, m を用いて表せ。ただし、境界条件として $\left.\dfrac{dV}{dx}\right|_{x=0} = 0$ を用いよ。

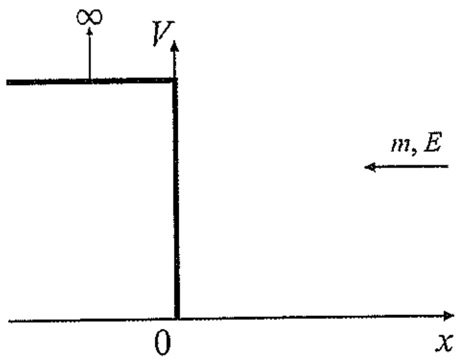
ヒント：必要に応じて、関係式 $\dfrac{dV}{dx}\dfrac{d^2V}{dx^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dV}{dx}\right)^2$ を利用せよ。

(10) 問 (9) で得られた微分方程式を解き、境界条件を考慮することによって、J を V_p, ε, e, m, d を用いて表せ。

問題3

量子力学で1次元の散乱問題を考える。$x \leq 0$には無限に高いポテンシャル壁が存在し、$x \to +\infty$の彼方から正のエネルギーEを持った質量mの粒子が入射する。なお、エネルギーの基準点は、ポテンシャルVが0となるところに取る。以下の問いに答えよ。

I. まず、$x > 0$の全域でポテンシャルVが0である場合を考える。



$x > 0$における波動関数を

$$\phi_0(x) = e^{-iqx} - S_0 e^{iqx}$$

と表す。ただしここでqは波数

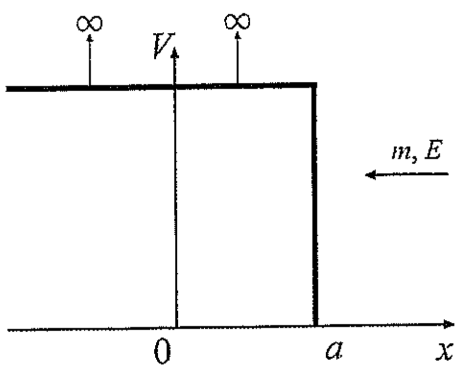
$$q = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

であり、$\hbar$はプランク定数hを2πで割ったものである。

(1) $x = 0$における接続条件からS_0を求めよ。

(2) $\phi_0(x)$を$\alpha_0 \sin(qx + \delta_0)$の形に書き換え($\alpha_0$は適当な複素数)、位相$\delta_0$を求めよ。ただし位相は、$-\frac{\pi}{2}$よりも大きく$\frac{\pi}{2}$以下の値を取る実数とする(以下の問いでも同様)。

II. 次に、無限に高いポテンシャル壁が$x \leq a$まで拡がった場合を考える($a > 0$)。$x > a$ではポテンシャルは0とする。



(3) $x > a$ における波動関数を

$$\phi_1(x) = e^{-iqx} - S_1 e^{iqx}$$

と表す。S_1 を求めよ。

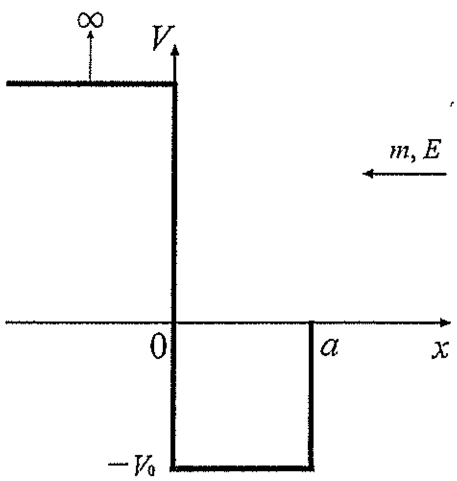
(4) 問 (2) と同様に、$\phi_1(x)$ を $\alpha_1 \sin(qx + \delta_1)$ の形に書き換え (α_1 は適当な複素数)、位相 δ_1 を求めよ。ただし $qa < \dfrac{\pi}{2}$ であるとする。δ_1 の符号は、ポテンシャル壁の存在領域が拡がったことによって、波動関数がどのような影響を受けたかという情報を含んでいる。その内容を 1 行程度で簡潔に説明せよ。

(5) $0 < x \leq a$ の領域のポテンシャルが $\phi_1(x)$ に及ぼす影響を、

$$f_1 \equiv |\phi_0(x) - \phi_1(x)|^2$$

で定義する。f_1 の具体的な表式を、虚数単位 i を用いない形で求めよ。

III. ここからは、$x > a$ ではポテンシャルが 0 で、$0 < x \leq a$ に引力型の井戸型ポテンシャル $-V_0$ $(V_0 > 0)$ がある場合を考える。



(6) $0 < x \leq a$ の領域における波動関数 $\phi_{\rm in}(x)$ の一般解 (任意定数を 2 つ含む) を求めよ。その後、$x = 0$ における波動関数の接続条件を課し、それらの任意定数が満たすべき条件を求めよ。解答にあたっては、

$$Q = \frac{\sqrt{2m(E + V_0)}}{\hbar}$$

で定義される、$0 < x \leq a$ における波数 Q を用いよ。

(7) 問 (6) で求めた条件式を用いると、$\phi_{\text{in}}(x)$ はただ 1 つの任意定数を含む形で表される。一方、$x > a$ における波動関数を

$$\phi_2(x) = e^{-iqx} - Se^{iqx}$$

と表す。これらの波動関数に $x = a$ における接続条件を課し、$\phi_{\text{in}}(x)$ に含まれる任意定数を消去することによって、S を決定せよ。$S = S_2S_1$ と表すと、S_2 はどう書かれるか?

以下、入射エネルギー E が小さく、

$$\epsilon \equiv \frac{q}{\sqrt{U_0}} \ll 1$$

が成立している場合を考える。ただしここで

$$U_0 \equiv \frac{2m}{\hbar^2} V_0$$

である。

(8) S_2 を ϵ を用いて表せ。その際、ϵ の 2 次以上の高次項は無視してよい。ただし $\sin(\sqrt{U_0}a) \neq 0$ かつ $\cos(\sqrt{U_0}a) \neq 0$ とする。

(9) $\tan(\sqrt{U_0}a) = \sqrt{U_0}a$ が成立している場合には、特殊な現象が起きることが知られている。これを具体的に見ていくことにしよう。
$\tan(\sqrt{U_0}a) = \sqrt{U_0}a$ のとき、問 (8) の結果を用いて $S\ (= S_2S_1)$ を求めよ。ただしその際、$\epsilon \ll 1$ の他に $q \ll \frac{1}{a}$ すなわち $qa \ll 1$ も成立しているものとし、qa の 2 次以上の高次項は無視すること。また、S の最終的な表式では ϵ を用いてはならない。
その上で、ポテンシャルが $\phi_2(x)$ に及ぼす影響

$$f_2 = |\phi_0(x) - \phi_2(x)|^2$$

を計算し、得られた結果の物理的な意味を 1 行程度で簡潔に説明せよ。

問題4

I. 以下の考察において、$\boxed{}$内に適切な式を入れよ。解答用紙において解答部分がわかるように解答部分を$\boxed{}$で囲むこと。なお、ボルツマン定数を k とし、温度 T に対して $\beta = (kT)^{-1}$ を用いてよい。N が十分に大きいときスターリングの近似式は $\ln N! \approx N \ln N - N$ である。

個々の粒子が2つの状態のいずれかをとることができる N 粒子系を小正準 (ミクロカノニカル) 集合の方法で考える。粒子は区別できるものとする。2つの状態のエネルギーは $+\epsilon$ $(\epsilon > 0)$ と $-\epsilon$ であるとし、与えられた全エネルギー E と粒子数 N に対して、可能な微視的状態数を数えることで熱力学量を導こう。

状態 $+\epsilon$ にある粒子の数 N_+ と、状態 $-\epsilon$ にある粒子の数 N_- を用いて、N と E は

$$N = \boxed{\ (1)\ }, \quad E = \boxed{\ (2)\ }$$

と表される。微視的状態の数 W は、N 個の粒子を N_+ 個と N_- 個に分ける場合の数 (組合わせの数) で与えられるから、E と N の関数として

$$W(E, N) = \boxed{\ (3)\ }$$

を得る。ボルツマンの原理からスターリングの近似式を用いて、E と N の関数としてエントロピー S を求めると

$$S(E, N) = -kN \left[\boxed{\ (4)\ } \right]$$

となる。上の式において E は、$\boxed{(5)}$を単位として離散的に変化する量であるが、N が十分に大きいとして E を連続的な量と見なす。統計力学的温度 T の定義 $T^{-1} = \left(\dfrac{\partial S}{\partial E} \right)_N$ より、E と N の関数として

$$T^{-1} = -\frac{k}{2\epsilon} \ln \left[\boxed{\ (6)\ } \right]$$

が求められる。これを E について解いて

$$E(N, T) = -N\epsilon \left[\boxed{\ (7)\ } \right] \qquad (*)$$

となる。比熱 C は E の温度微分として与えられるから

$$C = \frac{\partial E}{\partial T} = Nk \left[\boxed{\ (8)\ } \right]$$

を得る。

以上の議論を正準 (カノニカル) 集合の方法で再考しよう。N 個の粒子はそれぞれ独立に、$+\epsilon$ と $-\epsilon$ のエネルギー値を取り得るから N 粒子系の分配関数 Z は

$$Z = \left[\boxed{\ (9)\ } \right]^N$$

と書ける。Eは、Zを用いて

$$E = \boxed{\quad (10) \quad}$$

と計算できることから、結局、正準集合の方法を用いても小正準集合の方法と同じ式(*)により与えられることがわかる。

II. 前問では、正準集合の方法に従い分配関数を計算することで簡便に熱力学量を計算できることがわかった。さて、温度Tの熱浴と接した2個の同種の粒子からなる系がある。その粒子は、エネルギーがそれぞれ0, ϵ, 3ϵである3つの量子力学的状態のいずれかに存在している。次の3つの場合について、全ての微視的状態を考えることによって、系の分配関数を求めよ。なお、ここではスピンの自由度は考慮しないこととする。

(11) 粒子が区別できるとき

(12) 粒子がボーズ-アインシュタイン統計に従うとき

(13) 粒子がフェルミ-ディラック統計に従うとき