

大阪大学・大学院理学研究科

博士前期課程（宇宙地球科学専攻・第2次募集）入学試験問題

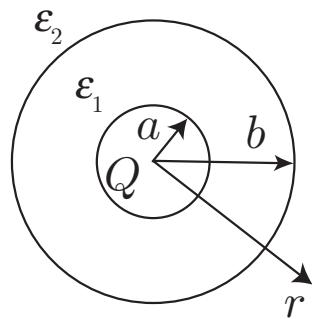
小論文

(2014年10月25日 11時00分～12時30分)

次の[1]から[5]までの5問のうち2問を選択して解答せよ。選択した問ごとに別の解答用紙を用い、解答用紙の上部にある問題番号の欄に選択した問の番号を記入すること。

[1]

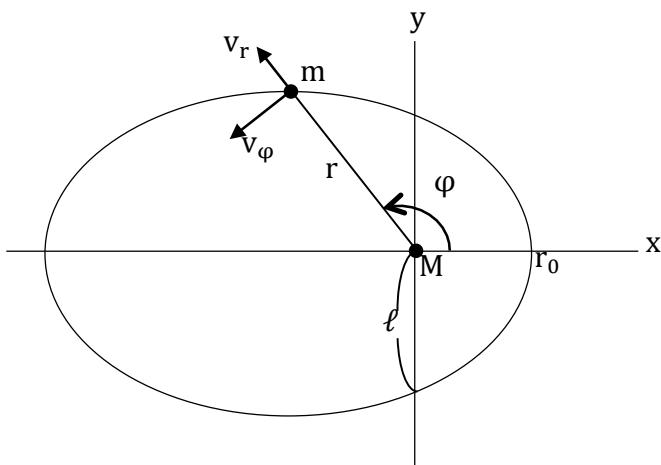
図のような半径 a の導体球がある。それを取り囲んで同心状に外半径 b の誘電体（誘電率 ϵ_1 ）があり、さらにその外側に無限遠まで続く別の誘電体（誘電率 ϵ_2 ）がある。導体球は真電荷 $Q (> 0)$ で帯電している。以下の問題について答えよ。なお、 $\epsilon_1 < \epsilon_2$ とし、真空の誘電率は ϵ_0 とする。



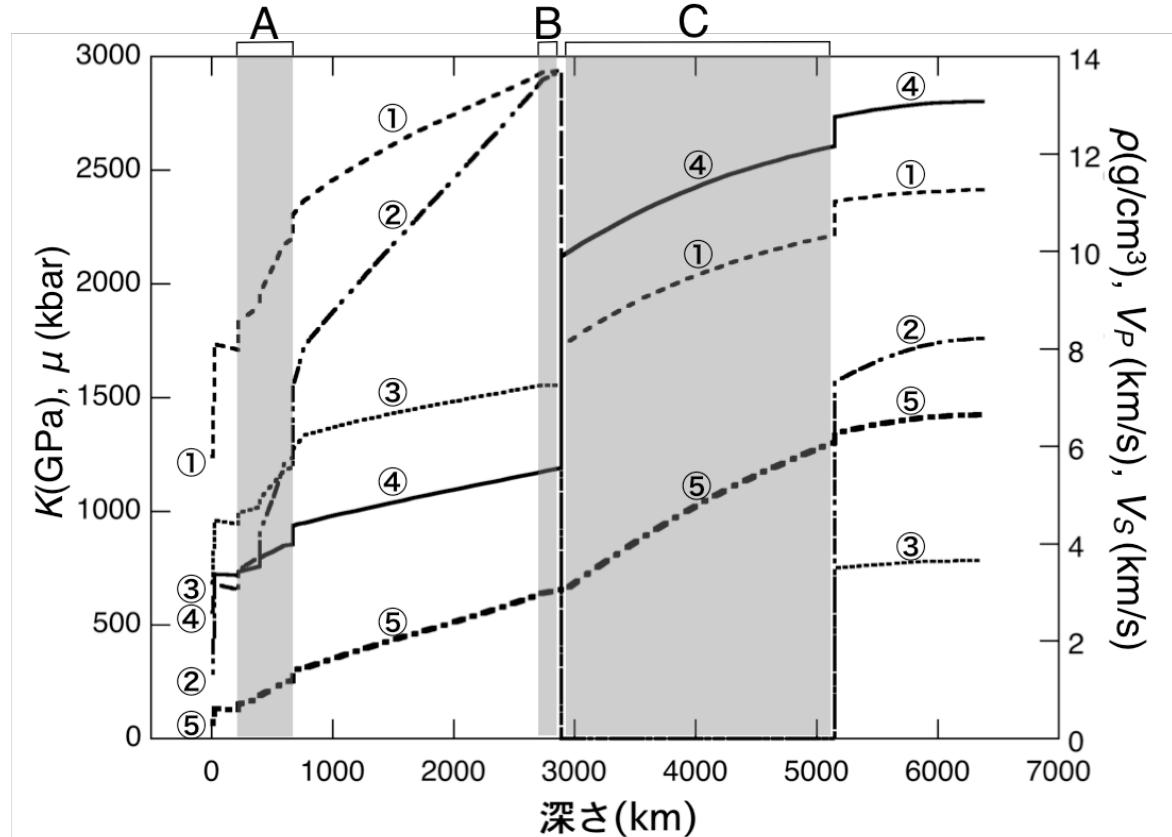
- (1) 真電荷 Q は導体球のどこに（あるいはどのように）分布するか、簡単に述べよ。
- (2) 導体球の中心からの距離を r とするとき、 $0 < r < a$ での電場 E を求めよ。
- (3) $r > a$ での電束密度 D を求めよ。
- (4) $a < r < b$ と $r > b$ での電場 E を求めよ。
- (5) 全領域で電位 V を r の関数として求め、グラフに表わせ。ただし $r \rightarrow \infty$ で $V \rightarrow 0$ とする。
- (6) 誘電体の境界面 ($r = b$) での分極電荷の面密度 σ_P を求めよ。
- (7) この系全体の電荷のエネルギー U_1 を求めよ。
- (8) この系全体の電場のエネルギー U_2 を求めよ。

[2] 太陽(質量M)からの方有引力を受けて運動する惑星(質量m)は、太陽を含む平面内で橿円軌道上を運動する。惑星を質点と考え、 $M \gg m$ とする。図のように、太陽の位置を原点とする平面極座標(r, φ)を導入し、惑星の位置を表す。 φ は、原点と惑星を結ぶ線分がx軸となす角度である。 $\varphi = 0$ が近日点の方向に対応する。万有引力定数はGとする。以下の問題に答えよ。

- (1) 惑星の速度の動径方向成分 v_r 、方位角方向成分 v_φ を、 r 、 φ とその時間微分 \dot{r} 、 $\dot{\varphi}$ をつかって記せ。
- (2) 動径方向の惑星の運動方程式を $ma_r = F_r$ 、方位角方向の惑星の運動方程式を $ma_\varphi = F_\varphi$ という形にかいた場合の、 a_r 、 F_r 、 a_φ 、 F_φ をそれぞれ記せ。
- (3) $r^2\dot{\varphi} = h$ とするとき、 h が定数となることを示せ。
- (4) 惑星の運動エネルギーが $K = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2}\right)$ とかけることを示せ。
- (5) 太陽が惑星に及ぼす万有引力のポテンシャルを r の関数 $U(r)$ としてかけ。ただし、無限遠方をポテンシャルの基準(ゼロ)にとることとする。
- (6) 惑星が近日点にあるときの r を r_0 と表記することにして、惑星の全エネルギーをかけ。
- (7) 惑星の描く橿円軌道が $r = \frac{\ell}{1+\varepsilon \cos(\varphi)}$ で与えられるとする。ただし、 ℓ は半直弦とよばれる長さで $\ell = \frac{h^2}{GM}$ とかける。また ε は離心率とよばれる定数である。この場合、惑星の全エネルギーEを m, h, G, M, ε を用いて表せ。
- (8) 橿円軌道の場合に、Eと ε がとる範囲をそれぞれ答えよ。



[3] 図は地球内部の1次元地震波構造モデルである PREM (Preliminary Reference Earth Model) から得られる物理量、縦波速度(V_P)、横波速度(V_S)、密度(ρ)、体積弾性率(K)、剛性率(μ)を示している。この図を見て以下の問題に答えよ。



- (1) ①～⑤に該当する物理量をそれぞれ書け。
- (2) Aの領域では各物理量に複雑な変化が見られる。その理由として考えられることを、この領域の主要鉱物を挙げて3行程度で述べよ。
- (3) Bの領域では、より浅い層に比べて地震波速度に関する地域変化や異方性が大きいことが知られている。これらの異常が存在する原因について5行程度で議論せよ。
- (4) Cの領域にある物質は、液体状態にあると考えられる。この領域の物質科学的性質・地球のダイナミクスや生命圏に及ぼす影響などの観点から、地球におけるこの領域が持つ役割について5行程度で述べよ。
- (5) この図では地球内部の温度構造に対応する情報が現れていない。A,B,Cの各領域の深さ方向の温度分布を推定する方法について、物質科学的な観点から7行程度で述べよ。

[4]

問題 1.

地球型惑星の大気組成について知るところを数行程度で述べよ。

問題 2.

天体が大気を保持できるかどうかの最低条件について考えよう。ジーンズ (Jeans) 散逸と呼ばれる、大気を構成する気体分子が熱的に散逸する過程を見る。

- (1) 気体分子が惑星の重力を振り切り、宇宙空間に脱出するのに必要な最小限の速度 v_e を求めよ。ただし、気体分子の惑星中心からの距離を r 、惑星質量を M 、万有引力定数を G とする。

ジーンズ散逸は、外圏 (exosphere) から気体が散逸する機構である。外圏とは、速い気体分子が一度も他の分子に衝突せずに大気圏外へ出てしまう領域のことである。外圏の下端をエクソベース(exobase)と呼ぶ。エクソベースの惑星中心からの距離を r_e とする。エクソベース近傍に存在する分子の内、宇宙空間に脱出できる鉛直方向速度 v_z を持つ分子の割合を F_e とおく。

- (2) 単位時間・単位面積あたり、エクソベースを通過する散逸分子の数を求めよ。ただし、エクソベースにおける大気分子密度を $n(r_e)$ とする。ここでは、簡単のため、エクソベースを通過する散逸分子の v_z はすべて v_e と等しいとせよ。
- (3) 気体分子が惑星から散逸するタイムスケールを求めよ。地表からエクソベースまでの単位面積あたりの気体分子総数を N とする。 N と $n(r_e)$ は常に一定の比に固定されていると仮定する。

以下では、簡単のため、大気を構成する気体分子は 1 種類だけを考え、その質量を m とする。平衡状態で、気体分子の速度は Maxwell-Boltzmann 分布を持つ。その分布は、

$$f(v_z) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp\left(-\frac{mv_z^2}{2kT}\right)$$

と書き表すことができる。ただし、 T は温度、 k はボルツマン定数 (1.4×10^{-23} J/K) である。これを用い、先ほど定義した F_e を、以下のように求めることができる。

$$\begin{aligned} F_e &= \int_{v_e}^{\infty} f(v_z) dv_z \\ &= \int_{v_e}^{\infty} \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp\left(-\frac{mv_z^2}{2kT}\right) dv_z \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(v_e \sqrt{\frac{m}{2kT}}) \end{aligned}$$

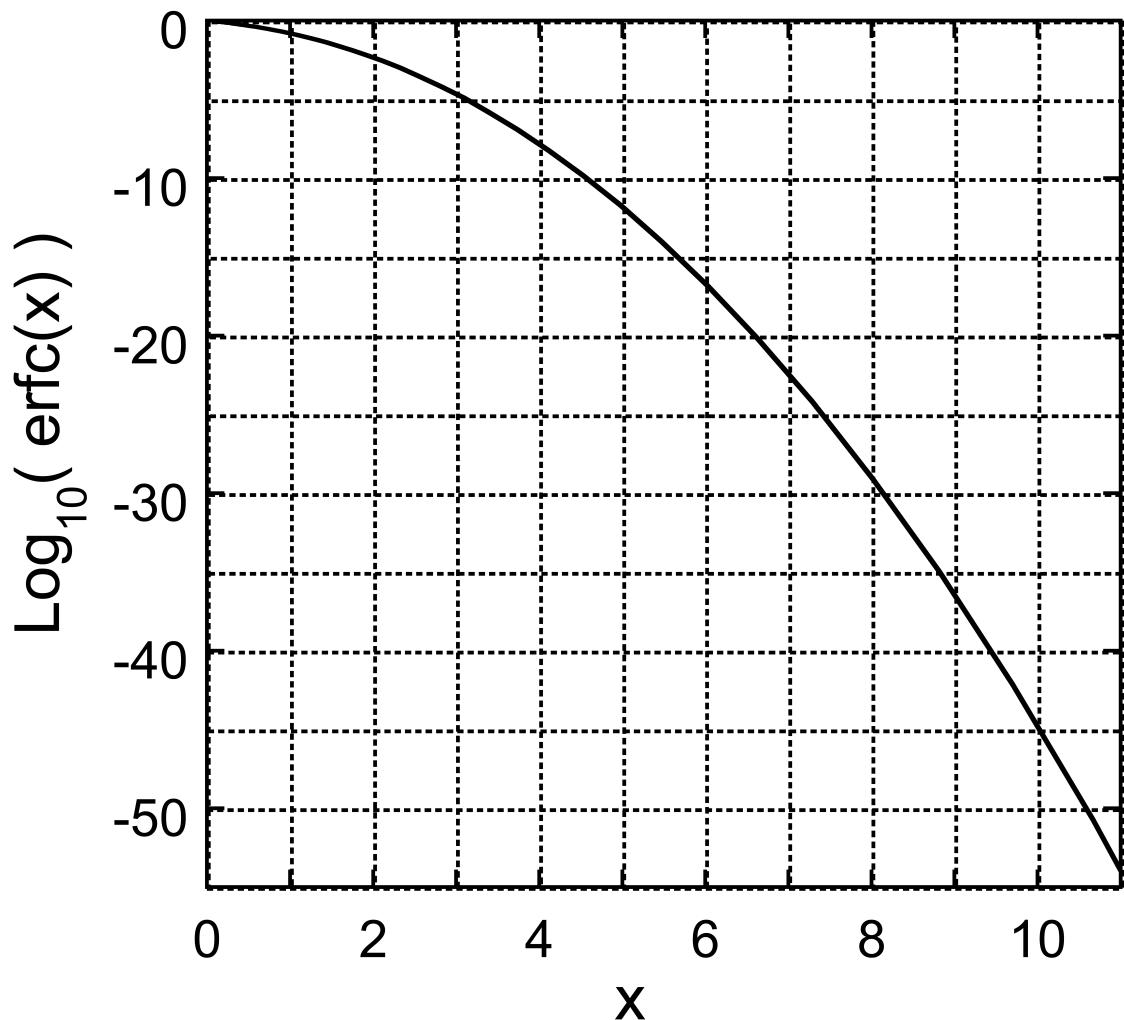
ここで、以下に定義される、相補誤差関数を用いた。

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-y^2} dy$$

- (4) 地球から水素原子 ($m(H) = 1.7 \times 10^{-27}$ kg) が散逸するのに要する年数を求めよ。求める数値は有効数字 1 術でよい。さらに、酸素原子 ($m(O) = 16 \times m(H)$) が散逸

する場合についても同様に年数を求め、重い気体分子・原子はこの過程では地球から散逸しないことを確認せよ。

計算において以下の数値を用いるとよい。地球の脱出速度 v_e は 10^4 m/sec である。エクソベースにおける温度 $T(r_e)$ は 1000 K である。従って、エクソベースにおける水素原子の典型的速度 $\sqrt{\frac{2kT(r_e)}{m(H)}}$ は $4 \times 10^3 \text{ m/sec}$ と計算できる。エクソベースにおける分子数密度 $n(r_e)$ は 10^{12} m^{-3} 、また、地表からエクソベースまでの単位面積あたりの気体分子総数 N は 10^{29} m^{-2} とする。 $n(r_e)$ と N は、水素原子、酸素原子の考察いずれの場合も、同じ数値を用いよ。なお、相補誤差関数の数値は以下のグラフから読み取れ。



[5] 以下の事項(ア)～(ケ)から、3つを選択して、それぞれの事項について、5～10行程度で論述しなさい。図や式を用いてもよいが、行数には数えないこと。また、選択した記号(ア)、(イ)などを、解答用紙に記入すること。

(ア) 不確定性原理とその例

(イ) 恒星の質量と進化の関係

(ウ) ハッブルの法則

(エ) 潮汐力による天体の変形

(オ) ジャイアントインパクト説

(カ) 深発地震

(キ) 放射性炭素年代測定

(ク) 暗い太陽のパラドックス

(ケ) アイソスタシー