

問題 1

- I. 図1のように水平方向に x 軸を、鉛直上向きに z 軸を取り、質量 m 、長さ $2a$ の細長い一様な棒を原点 O からつり下げた。棒は原点 O を中心に滑らかに回転することができ、原点 O のまわりでの棒の慣性モーメントは I とする。はじめ棒は静止しており、質量 M の質点を速度 v で、棒の原点 O から下方 h の位置に水平に衝突させた。質点との衝突で棒は変形しない。図2のように衝突後に質点は棒と一体となり、棒は最大角 δ だけ振れた後に原点 O を中心として微小角の振り子運動をした。衝突前と衝突後、棒と質点は xz 面内で運動し、空気抵抗は無視してよい。重力加速度は g とする。

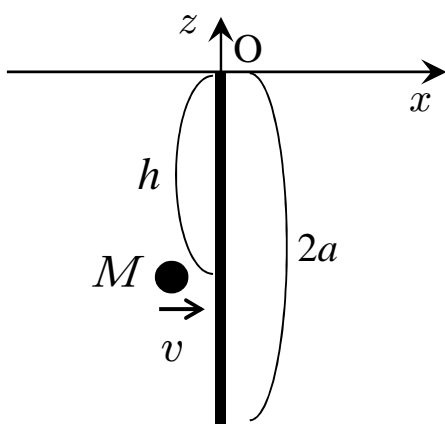


図 1

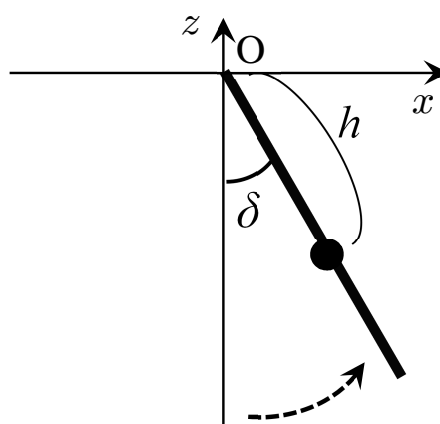


図 2

- (1) 原点 O の周りでの棒の慣性モーメント I を答えよ。
- (2) 質点の初速度 v を δ の関数として書け。解答には棒の慣性モーメント I を用いてもよい。
- (3) 質点と衝突して一体化した後の、棒の振り子運動の角振動数を求めよ。解答には棒の慣性モーメント I を用いてもよい。また、微小角の振り子運動をしているときの棒の振れ角 δ' は、 $\sin \delta' \approx \delta'$ としてよい。

- II. ばね定数 k 、自然長が η のばねを原点 O からつり下げた。ばねは原点 O を中心に滑らかに回転することができる。また、ばねの質量は無視できる。このばねの他の端に、質量 m 、長さ $2a$ の細長い一様な棒を取り付けた。棒はばねの端を中心に滑らかに回転することができる。ばねと棒を鉛直下向きに垂らし、静止させたときのばねの長さは $l = \eta + \frac{mg}{k}$ となる。図 3 のように、このばねと棒を xz 面内で振動させる。ばねは長さ方向にのみ伸び縮みし、それ以外の方向には変形しない。棒の重心の座標を (x, z) とする。空気抵抗は無視してよい。

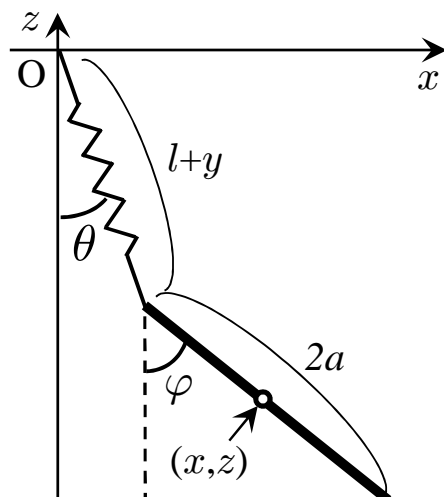


図 3

- (4) ばねと棒の鉛直方向に対するなす角を、それぞれ θ と φ とし、ばねの長さを $l + y (= \eta + \frac{mg}{k} + y)$ とする。棒の重心の座標 (x, z) を a, l, y, θ, φ を用いて表せ。
- (5) この棒の重心まわりの慣性モーメントは $\frac{ma^2}{3}$ である。この棒とばねからなる系のラグランジアンを求めよ。解答には、 $m, a, l, y, g, k, \theta, \varphi, \dot{y}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$ を用いよ。ただし、 $\dot{y}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$ は、それぞれの時間微分を表す。

III. 図 3 のばねと棒が微小振動している場合を考える。このとき、ばねの伸縮と、ばねと棒の振れ角は極めて小さいため、微小量の高次の項を無視するとラグランジアンは次のようになる。

$$L = m \left\{ \frac{1}{2} \dot{y}^2 + \frac{1}{2} l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{2}{3} a^2 \dot{\varphi}^2 + al \dot{\theta} \dot{\varphi} + g \left(l + y - \frac{1}{2} l \theta^2 + a - \frac{1}{2} a \varphi^2 \right) \right\} - \frac{1}{2} k \left(y + \frac{mg}{k} \right)^2$$

- (6) このラグランジアンを用いると、ばねの伸縮は (y の) 単振動となることがわかる。この振動の角振動数を求めよ。
- (7) このラグランジアンを用いて、 θ と φ の運動方程式を連立微分方程式として求めよ。
- (8) 小問 (7) で求めた連立微分方程式の解は、 $\theta = A \cos(\omega t + \alpha)$ と $\varphi = B \cos(\omega t + \alpha)$ と表すことができる。この系の基準角振動数 ω を全て求めよ。
- (9) 図 3 は小問 (8) で求めた 1 つの基準角振動数でばねと棒が基準振動をしているときの、 xz 面内での運動の特徴を図示したものである。(8) で求めた他の基準振動について、 xz 面内での運動の特徴を図 3 と同様に図示せよ。

(計算用余白)

(計算用余白)
問題 2 は次のページから

問題 2

100 MeV ($= 10^8$ eV) 程度のエネルギーの陽子ビームを生成する事を目標として、サイクロトロンによる陽子の加速を考えよう。以下では、素電荷は $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C、エネルギーの単位は $1 \text{ eV} = e \times 1 \text{ V} = 1.6 \times 10^{-19}$ J とする。

- I. サイクロトロンは、陽子などのイオンが一様な静磁場の中で円運動することを利用して、高周波の電場を用いて繰り返し加速することにより、高いエネルギーのイオンビームを得る装置である。ただし、ここでは加速過程の詳細は扱わないこととする。また、電磁放射は無視する。

サイクロトロンの内部で、陽子（質量 M 、電荷 $+e$ ）が図 1 のように一様な磁束密度 B に垂直な平面内で半径 r 、速さ v で円運動している。加速によってエネルギーが増加するにともない、半径 r は最大半径 a まで徐々に増加するが、1 周の回転については近似的に円運動と見なせると考えて、以下の問に答えよ。

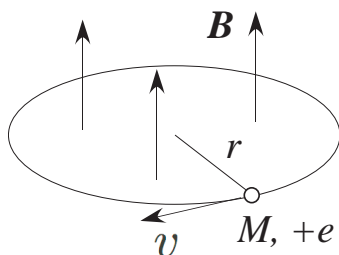


図 1

- (1) 円運動の周期 T が v と r によらないことを示せ。ただし、小問 (1) から (3) までは運動を非相対論的に扱うこと。これにより、低エネルギーから高エネルギーまで、常に一定の周期で運動することが分かる。
- (2) 最大半径 $r = a$ に達した時の運動エネルギー K を e 、 B 、 a 、 M を用いて表せ。
- (3) $B = 1.6$ T、 $a = 1.0$ m とするとき、回転の周波数 f と、得られる陽子の運動エネルギー K を eV を単位として有効数字 2 桁で求めよ。陽子の質量は、光速を $c = 3.0 \times 10^8$ m/s として、 $Mc^2 = 9.4 \times 10^2$ MeV としてよい。また、 $[T] = [\text{V} \cdot \text{s} / \text{m}^2]$ である。
- (4) 次に（この小問だけにおいて）特殊相対論的に問題を扱おう。この小問で、見かけの質量とは全エネルギーを c^2 で割ったものであり、運動エネルギーとは全エネルギーから静止エネルギーを引いたものこととする。小問 (1) で求めた周期 T の表式は、 M を見かけの質量で置きかえればそのまま成り立つ。低エネルギーから高エネルギーまで徐々に陽子を加速するとき、運動エネルギーが

増加するにつれ陽子の見かけの質量も増加するため、磁場が一定ならば周期 T が変化してしまう。

運動エネルギーが 1.0×10^2 MeV に達した陽子を $r = 0$ 付近と同じ周期 T で円運動させるためには、この半径での磁束密度 B を $r = 0$ 付近の何倍にしなければならぬか、有効数字 2 桁で答えよ。

- II. 半径 $a = 1.0$ m の円内に、一様な磁束密度 $B = 1.6$ T を発生させる装置を考える。図 2 のような、断面積が一定の鉄芯で出来た平行な磁極の電磁石を設計する。磁極の間隔を d 、半径を a 、電流は I とし、鉄芯の部分の長さを l とする。簡単のため、 $d \ll a$ とみなせて、磁極の間と鉄芯以外の空間への磁力線の漏れ出しのない理想的な場合を考える。電流 I により、鉄芯の内部や磁極の間に磁場が発生するが、磁極の間の磁束密度 B を 1.6 T としたい。鉄の透磁率を μ とし、真空の透磁率を $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ T·m/A とする。また、磁場は時間変化しないものとする。

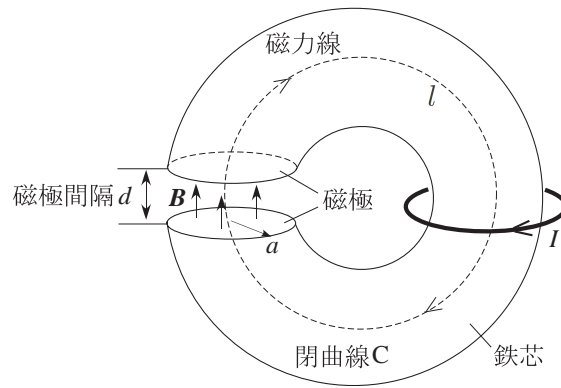


図 2

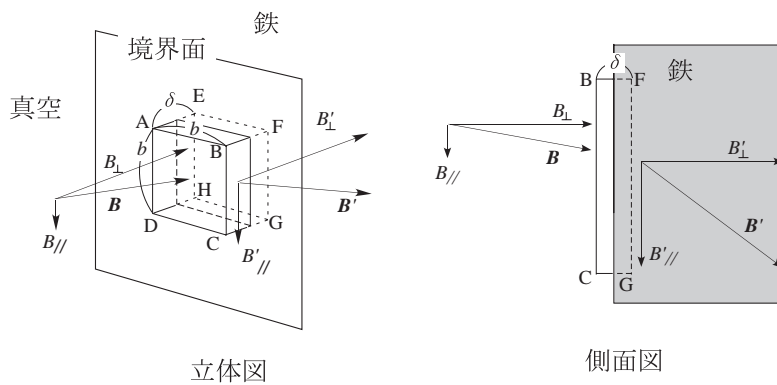


図 3

- (5) 設計に先立ち、図 3 のように真空から鉄芯に磁力線が斜めに入る場合、境界面に垂直な磁束密度の成分 B_{\perp} (鉄芯内部で B'_{\perp}) と境界面に平行な磁場成分

$H_{//}$ (鉄芯内部で $H'_{//}$) にどのような境界条件が成り立つかを考える。ただし、 $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ 、 $\mathbf{B}' = \mu \mathbf{H}'$ である。また、鉄芯に電流は流れていないものとする。

鉄芯の表面を含む微小な直方体 ABCDEFGH を考える。ここで、面 ABCD は境界面に平行、辺 BC は図 3 の $B_{//}$ に平行にとり、 $AB = AD = b$ 、 $AE = \delta$ ($b \gg \delta$) とする。この直方体を用いて、 B_{\perp} と B'_{\perp} に成り立つ境界条件を (静磁場についての) ガウスの法則から導け。

(6) $H_{//}$ と $H'_{//}$ に成り立つ境界条件をアンペールの法則から導け。

(7) 図 2 の閉曲線 C (長さ $l + d$ とせよ) 上での磁場 H の線積分 $\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$ の値は電流 I で決まる。小問 (5) の境界条件を用い、 $\mu/\mu_0 \gg l/d$ の条件の下で、 $B = 1.6 \text{ T}$ を発生させるために必要な I を有効数字 2 桁で答えよ。ただし、 $d = 0.10 \text{ m}$ とする。

III. 有限な大きさをもつ現実の平行な円形磁極の電磁石においては、磁極外部への磁力線の漏れ出しのために、磁束密度は完全には一様にならない。この場合の磁力線の様子を考察してみよう。

(8) 図 4 のように x, y, z 軸をとる。(ただし、原点は磁極間領域の中心とする。) y 軸上で $y > 0$ の点 A について考える。磁束密度の z 成分 B_z は、 y 軸上では図 4 下図のように $y > 0$ で単調に減少する。このとき、点 A での微分形のアンペールの法則から $\partial B_y / \partial z$ の符号をしらべよ。

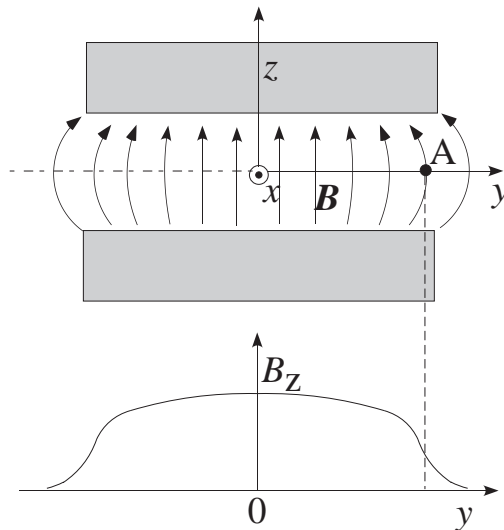


図 4

(9) 対称性から点 A 上 ($z = 0$) で $B_y = 0$ となる。このことと小問 (8) の結果を利用して、 $z = 0$ 面の上下で B_y の符号がどう変化するかに着目して、磁力線が点 A 付近で図 4 上図のように外側に凸に曲がることを説明せよ。

- (10) 図4上図のように曲がった磁力線の下での陽子の運動を考えよう。 $z = 0$ 面内では図1のような円運動が可能である。ここでは、陽子が $z = 0$ 面に平行な $z > 0$ の面内で近似的に円運動をする場合を考える。この陽子に $z = 0$ 面に引き戻す力が働くことを図解せよ。すなわち、答案用紙に図5を描き写し、この陽子の A' 点における運動の向き (x 軸の正又は負)、陽子に働く力のベクトル、さらにその力の y 成分と z 成分を示せ。ただし、A' 点は上方にずれた陽子の軌道が yz 面を横切る点の一つである。

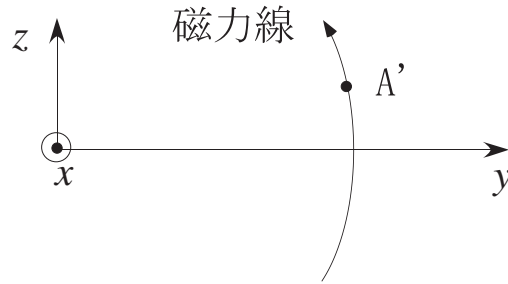


図5

問題 3

スピンを持った粒子は粒子固有の磁気能率を持ち、静磁場中に置くと歳差運動を起こす。この系にさらに回転磁場を加えると、共鳴条件を満たした時に回転磁場とエネルギーをやり取りし、状態間の遷移を起こす。共鳴条件は粒子固有の磁気能率や静磁場の強さ、回転磁場の角振動数に依存するため、粒子の磁気能率や磁場強度の測定、核磁気共鳴画像法 (MRI) など様々な用途に用いられている。スピン共鳴法と呼ばれるこの方法を電子について考えてみよう。

- I. スピン $1/2$ の演算子 $\mathbf{S} = (S_x, S_y, S_z)$ はその z 成分の固有ブラ・ケットを用いて以下のように表せる。

$$\begin{aligned} S_x &= \frac{\hbar}{2} (|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow|) \\ S_y &= \frac{i\hbar}{2} (-|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow|) \\ S_z &= \frac{\hbar}{2} (|\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|) \end{aligned}$$

$|\uparrow\rangle$ 、 $|\downarrow\rangle$ は S_z の固有値が $+\hbar/2$ と $-\hbar/2$ の固有ケットである。

- (1) 以下で定義する $|\uparrow\rangle_x$ 、 $|\downarrow\rangle_x$ が S_x の固有ケットであることを示せ。

$$\begin{aligned} |\uparrow\rangle_x &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \\ |\downarrow\rangle_x &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle) \end{aligned}$$

- II. シュレーディンガー描像での波動関数 $|\phi(t)\rangle$ の時間発展はハミルトニアン H を用いて次の方程式で表される。

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\phi(t)\rangle = H |\phi(t)\rangle \quad (*)$$

ハミルトニアン H が時間を含まない場合、時刻 t の状態 $|\phi(t)\rangle$ は以下のように初期状態ケット $|\phi(t=0)\rangle$ と時間発展演算子 $e^{-iHt/\hbar}$ の積であらわせる。

$$|\phi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar} |\phi(t=0)\rangle$$

このことを用いて、 z 軸方向を向いた一様な静磁場 $\mathbf{B} = (0, 0, B_0)$ の中に置かれた電子スピンの運動を考える。ここで B_0 は時間によらない定数である。電子スピンの異常磁気能率を無視すると、ハミルトニアン H_0 は $H_0 = \omega_0 S_z$ で与えられる。ただし、 $\omega_0 = eB_0/m_e c$ 、 e は素電荷 ($e > 0$)、 m_e は電子質量、 c は光速である。

- (2) 時刻 $t=0$ でスピンの向きが x 方向を向いていた状態 $|\phi(t=0)\rangle = |\uparrow\rangle_x$ を考える。この状態の時刻 t での波動関数 $|\phi(t)\rangle$ を $|\uparrow\rangle$ と $|\downarrow\rangle$ の線形結合で書け。

- (3) この系を古典論で考えると、スピンの角振動数 ω_0 で z 軸の周りを歳差運動することが分かる。量子論でも古典論に対応する解釈が出来ることを示すため、 S_x 、 S_y 、 S_z の $|\phi(t)\rangle$ に対する期待値を求めよ。

III. 次式のように、一様静磁場 B_0 に加えて xy 平面内を角振動数 ω で回転する磁場をかける。

$$\mathbf{B} = (B_1 \cos(\omega t), B_1 \sin(\omega t), B_0)$$

ハミルトニアン H には、以下のように時間に依存する成分 V が加わる。

$$\begin{aligned} H &= H_0 + V \\ H_0 &= \omega_0 S_z \\ V &= \frac{eB_1}{m_e c} \{S_x \cos(\omega t) + S_y \sin(\omega t)\} \end{aligned}$$

このハミルトニアンで時間発展する状態 $|\phi(t)\rangle$ を考える。

- (4) 時刻 t の波動関数 $|\phi(t)\rangle$ は $|\uparrow\rangle$ と $|\downarrow\rangle$ の線形結合で書ける。展開係数の時間依存性のうち H_0 による時間依存性を分離し、

$$|\phi(t)\rangle = c_+(t)e^{-iH_0 t/\hbar} |\uparrow\rangle + c_-(t)e^{-iH_0 t/\hbar} |\downarrow\rangle$$

と展開する。 $c_+(t)$ 、 $c_-(t)$ は展開係数である。式 (*) を用いると

$$i\frac{dc_+(t)}{dt}e^{-i\omega_0 t/2} |\uparrow\rangle + i\frac{dc_-(t)}{dt}e^{i\omega_0 t/2} |\downarrow\rangle = \frac{\Omega}{2} \{c_-(t)e^{-i\omega t}e^{i\omega_0 t/2} |\uparrow\rangle + c_+(t)e^{i\omega t}e^{-i\omega_0 t/2} |\downarrow\rangle\}$$

となることを示せ。ただし $\Omega = eB_1/m_e c$ である。

- (5) 展開係数 c_+ 、 c_- が満たすべきケットを含まない連立微分方程式を求めよ。

以下の小問 (6) と (7) では、回転磁場の角振動数が静磁場によるスピンの歳差運動の角振動数と一致する場合、すなわち、 $\omega = \omega_0$ の場合を考える。

- (6) $t = 0$ で状態 $|\phi\rangle$ のスピンの $-z$ 方向を向いていたとする ($|\phi(t=0)\rangle = |\downarrow\rangle$)。この状態の時刻 t での波動関数 $|\phi(t)\rangle$ を $|\uparrow\rangle$ と $|\downarrow\rangle$ の線形結合で書け。

- (7) 状態 $|\phi(t)\rangle$ についてのスピンの z 成分の期待値 $\langle S_z \rangle$ を求めよ。

<< 問題の背景 >>

V によって $\langle S_z \rangle$ が小問 (7) の答えのような時間変化をするということは、この相互作用によって H_0 の固有状態 ($|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$) 間の遷移が引き起こされているということを意味している。小問 (5) の微分方程式を一般の場合に解くと、このような遷移が起きるのは $\omega \approx \omega_0$ の時だけであることが分かる。粒子に固有な磁気能率と静磁場の大きさで決まる共鳴条件が満たされた時のみ回転磁場 (実際には振動磁場でよい) との間でエネルギーの交換が起こるこの現象は、スピン共鳴法で利用される原理である。

(計算用余白)

(計算用余白)
問題 4 は次のページから

問題 4

- I. カルノー機関は等温膨張過程、断熱膨張過程、等温圧縮過程、断熱圧縮過程のサイクルからなる可逆な熱機関である。カルノー機関には「同じ熱源で働くカルノー機関の効率が同じである」という性質がある（カルノーの定理）。これを証明するために以下の問に答えよ。

- (1) 図 1 のように、2 つのカルノー機関 C、C' を考える。これらが外部にする仕事を W とする。カルノー機関 C、C' が高温源から吸収する熱量はそれぞれ Q_1 、 Q'_1 、低温源に放出する熱量はそれぞれ Q_2 、 Q'_2 である。図 1 の一方のカルノー機関を逆に動かして、もう一方のカルノー機関との複合機関を考察することにより、カルノー機関 C、C' の効率が

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$
$$\eta' = 1 - \frac{Q'_2}{Q'_1}$$

が等しくないと熱力学第 2 法則（クラウジウスの原理）に反すること示せ。

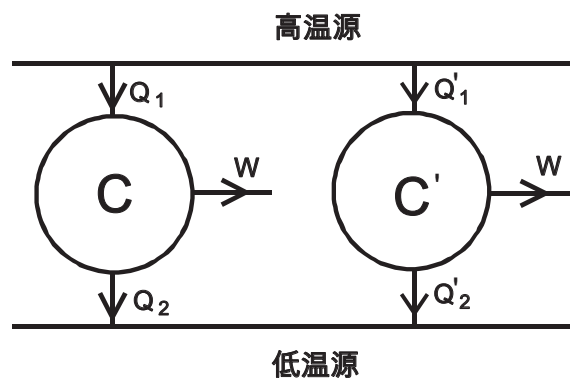


図 1

- II. 前問 I の結果から、 $Q_2/Q_1 = T_2/T_1$ として高温源と低温源の絶対温度をそれぞれ T_1 、 T_2 と定義すると、カルノー機関の効率は

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

とあらわされる。

一方、近年省エネルギーの重要性が認識され、水を温めるのにヒートポンプ給湯機が使われるようになってきた。ではヒートポンプを使うとなぜ省エネルギーになるのだろうか？これを理解するために、ヒートポンプがカルノー機関を逆に運転した逆カルノー機関であることに留意して、以下の問に答えよ。

- (2) いま、熱容量 C_W の水を外気温 T_0 から温度 T まで温めた。そのとき必要な熱量 Q を求めよ。また熱量の微小変化 δQ と水温の微小変化 δT との関係を求めよ。ただし、 C_W と T_0 は一定とする。

次に、逆カルノー機関であるヒートポンプからの放熱を使って水を温めた。ポンプにする仕事 W と水を温めるのに必要な熱量 Q との関係について考えてみよう。

- (3) 図2のように外気温を T_0 、水温を T として、ヒートポンプ H に微小の仕事 δW をした。ヒートポンプから水に放出される熱量を δQ 、外気からヒートポンプが吸収する熱量を δQ_0 としたとき、 $\delta W/\delta Q$ を T と T_0 を用いてあらわせ。

- (4) 小問 (2) と (3) の結果を用いて、水温 T_0 の水を T まで温めるのに必要な仕事 W を T 、 T_0 、 C_W を用いてあらわせ。

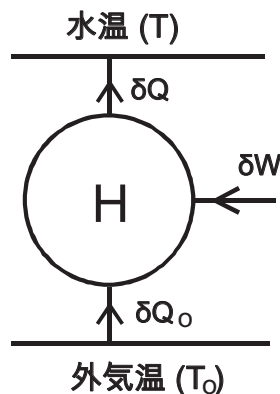


図 2

- (5) ヒートポンプの成績係数 $\gamma = Q/W$ を求めよ。
- (6) $T > T_0$ での γ を T の関数として、その概形をグラフに描け。
- (7) 外気温 T_0 と水温 T との温度差を大きくしたとき、 γ は
{(a) 小さくなる。 (b) 変わらない。 (c) 大きくなる。}
{ } の中で正しいものの記号を答案用紙に記入せよ。
- (8) $\Delta T/T_0 \ll 1$ ($\Delta T = T - T_0$) としたとき、 $\log(T/T_0)$ を微小量 ($\Delta T/T_0$) の2次まで近似して、小問 (5) で求めた γ の近似式を求めよ。
- (9) 外気温 $T_0 = 290$ K (約 17°C)、水温 $T = 340$ K (約 67°C) のとき、小問 (8) で求めた近似式を使って γ の値を求めよ。
- (10) 今まではヒートポンプは可逆機関であると考えてきたが、現実のヒートポンプは不可逆機関である。その場合 γ の値は小問 (5) で求めた γ に比べて、その大小関係はどうなるか？ その理由と共に答えよ。

ヒント：不可逆機関ヒートポンプとカルノー機関の複合機関にクラウジウスの原理を適用して考察せよ。