大阪大学・大学院理学研究科

博士前期課程(宇宙地球科学専攻・第2次募集)入学試験問題

小論文

（2012年10月27日　11時00分～12時30分）

次の［１］から［５］までの問いから２問を選択して解答せよ。各問には別の解答用紙を用い，解答用紙上部にある問題番号の欄に選択した番号を記入すること。表面に記入しきれない場合には、裏面を使用してよい。

[1] 「はやぶさ」などの宇宙機は、燃料を節約するために惑星の重力を利用して運動方向を変えたり、速さを変化させることがある。これらはスイングバイと呼ばれる。以下では、スイングバイの原理について、力学的に考察してみよう。

スイングバイについて考察するために、万有引力で相互作用する二体系を考えよう。宇宙機の質量を m、座標を $\mathbf{r}_1$、スイングバイに利用する惑星の質量を M、座標を $\mathbf{r}_2$ とする。両者のあいだには万有引力が働き、それぞれの運動方程式は、G を万有引力定数として

$$m\frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} = -G\frac{mM}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|^2}\frac{\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|} \tag{1}$$

$$M\frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} = G\frac{mM}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|^2}\frac{\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|} \tag{2}$$

である。

(1) 二つの運動方程式から、相対座標 $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2$ の運動方程式

$$\mu\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -G\frac{mM}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} \tag{3}$$

を導出せよ。ただし μ は換算質量、$r=|\mathbf{r}|$ である。

(2) 相対運動の運動方程式で、相対運動の角運動量 $\mathbf{L}=\mathbf{r}\times\mu\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$ が保存することを示せ。

(3) 相対運動の運動方程式で、全エネルギー

$$E = \frac{1}{2}\mu\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|^2 - G\frac{mM}{r} \tag{4}$$

が保存することを示せ。

相対運動の角運動量が保存するので、運動は平面内に限られる。相対座標を極座標 (r,ϕ) で表すと、$\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}=\dfrac{dr}{dt}\mathbf{e}_r+r\dfrac{d\phi}{dt}\mathbf{e}_\phi$ と書ける。ここで $\mathbf{e}_r,\mathbf{e}_\phi$ は、動径および方位角方向の単位ベクトルである。この時、角運動量ベクトルは $\mathbf{L}=\mu r^2\dfrac{d\phi}{dt}\mathbf{e}_z$ と書け、これが保存することから、定数 h を使って、$\dfrac{d\phi}{dt}=\dfrac{h}{r^2}$ と書くことができる。また、全エネルギーの保存は、

$$E = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\mu\frac{h^2}{r^2} - G\frac{mM}{r} \tag{5}$$

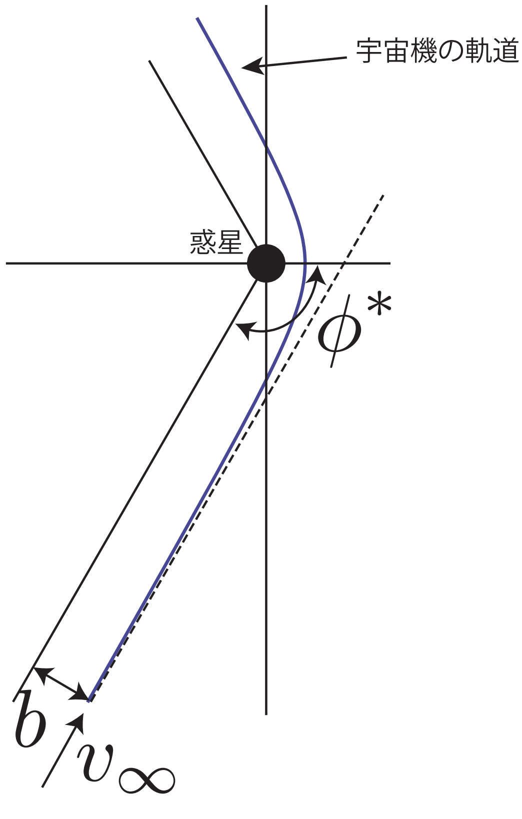
と書ける。(5) 式を満たす軌道は、

$$r = \frac{\ell}{1 + e\cos\phi} \tag{6}$$

となる。ただし、$\ell = \dfrac{\mu h^2}{GmM}$, $e^2 = \dfrac{2E\mu h^2}{G^2m^2M^2} + 1$ である。

(4) 宇宙機が無限遠から飛行してきて、惑星の周りを回り、再び無限遠に飛び去ることができる E の範囲を示せ。

(5) (4) が成立するとき、無限遠における相対運動の速さを $v_\infty(>0)$、衝突係数を b、初期速度ベクトルが曲げられた角度の半分を ϕ^*(図を参照) として、$\cos\phi^*$ を求めよ。ただし衝突係数は軌道の漸近線と、惑星をとおり軌道の漸近線に平行な直線の間の距離とする。



(6) 相対座標でみれば宇宙機の速度ベクトルの向きが変わるだけであり、速度の大きさは変化しない。惑星が運動している座標系から見れば、宇宙機の速度の大きさは変化することがあることを、惑星の速度ベクトルと相対速度ベクトルの合成の図を使って説明せよ。ここで、惑星は宇宙機に比べて非常に重いので、惑星と重心の位置は同一視でき、惑星の速度ベクトルはスイングバイの前後で変化しないとしてよい。

［2］真空中における電磁気学の基本法則に関して、以下の（1）－（6）に答えよ。

任意の閉曲面を S とし、S によって囲まれる領域を V とする。閉曲面 S を通って領域 V から出て行く正味の電気力線の合計は領域 V 内に含まれる全電荷量を真空の誘電率 ε_0 で割ったものに等しい。この法則は電場のガウスの法則と呼ばれる。

（1）電場ベクトル $\boldsymbol{E}$、真空の誘電率 ε_0、閉曲面 S に垂直で外側を向く単位ベクトル $\boldsymbol{n}$、領域 V 内における電荷密度 ρ を用いて電場のガウスの法則の積分表示を書け。

（2）電場のガウスの法則の微分表示を書け。

（3）共に点 O を中心に、一様な電荷密度 ρ_1 を持つ半径 a の球と、一様な電荷密度 ρ_2 を持つ内径 b、外径 c の同心中空球が真空中におかれている（$a < b < c$）。点 O からの距離 r の関数として電場の大きさを求めよ。

ファラデーの電磁誘導の法則の微分表示は以下のように表される。

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

また、アンペア・マクスウェルの法則の微分表示は以下のように表される。

$$\frac{1}{\mu_0}\nabla \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

ここで、$\boldsymbol{B}$ は磁束密度、$\boldsymbol{J}$ は電流密度、μ_0 は真空の透磁率を表す。

（4）閉曲線 C と、C を周辺とする面 S を貫く磁束を考える。閉曲線 C に沿う線積分を考え、ストークスの定理を用いてファラデーの電磁誘導の法則の積分表示を示せ。

単位面積を通って単位時間に運ばれるエネルギーの流れ $\boldsymbol{S} = \dfrac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$ はポインティング・ベクトルと呼ばれる。

（5）$\nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B})$ を $\boldsymbol{E}$ の微分と $\boldsymbol{B}$ の微分を含む項に分解せよ。

（6）$-\nabla \cdot \boldsymbol{S}$ を、ファラデーの電磁誘導の法則とアンペア・マクスウェルの法則の微分表示を用いて変形し、空間微分を含まない形で表せ。また、各項が持つ物理的な意味を述べよ。

［３］マグマ（溶融液）と鉱物との関係について相図を使って以下の問題に答えよ。

［設定1］

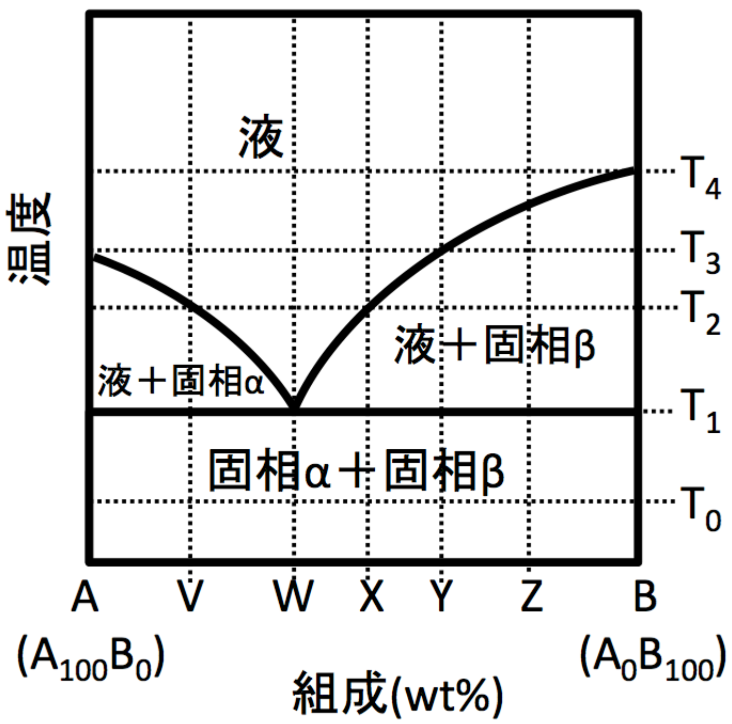
化学組成Aの鉱物 α（固相）と化学組成Bの鉱物 β（固相）の相図は図１のようになっている。相図中の「液」とは鉱物 α や鉱物 β が溶融して一つの液相（＝マグマ）となった状態をさす。

（１）白金るつぼの中で、温度 T_4、組成Zのマグマをゆっくりと冷却する時、温度 T_2 の時のマグマの組成と、マグマと生成鉱物 β の重量比がどうなるか、図を描いて説明せよ。

（２）白金るつぼの中に α と β の二種類の鉱物を含む全岩組成Zの岩石がある。この岩石を温度 T_0 から T_4 までゆっくりと加熱する。この時、生成したマグマと固相が常に反応できる「平衡過程」で加熱した場合と、生成した部分溶融マグマをただちに絞り出して、るつぼの外へ除外する「分別過程」で加熱した場合とで、T_0、T_1、T_2、T_3、T_4 各温度で、生成するマグマの有無や組成にどのような違いがでるか、図を描いて説明せよ。

なお、分別過程のマグマの組成とは、発生後ただちに取り除かれるその瞬間のマグマの組成である。

図１



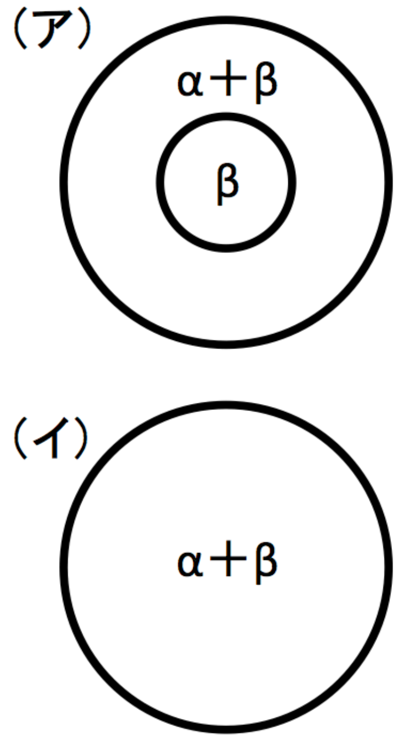
［設定 2］

全溶融状態（全部マグマの状態）から冷却して固結した小惑星（ア）と（イ）の断面を図２に示す。「$\alpha + \beta$」と表記してある層は鉱物 α と鉱物 β からなる岩石の層である。また、「β」と表記してある層は鉱物 β のみからなる層である。

なお、鉱物 α と鉱物 β は設定１と同じものであり、図１の相図に従うとする。

（３）小惑星（ア）（イ）について、それぞれどのような冷却固結過程を経ればそれぞれの内部構造を持つようになるか、相図を活かした仮説をつくり、解説せよ。

図２



［４］以下の設問に答えよ。

（１）地球及び太陽系の進化を論じる上で、隕石試料や岩石試料の年代測定は重要なアプローチ法の一つである。以下の小問に答えよ。

a）太陽系の年齢と比べて、比較的半減期の長い放射性核種を利用した年代分析法の例を一つ上げよ。また、その原理についてアイソクロンを図示しながら説明せよ。

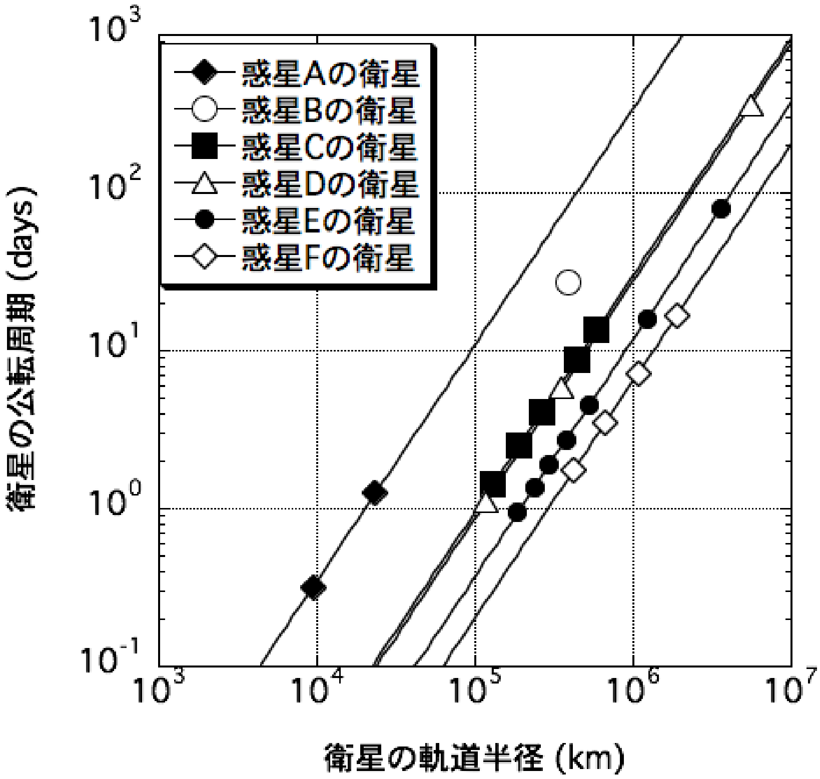
b）太陽系の初期進化を調べるのに使われる、極めて半減期の短い放射性核種を利用した年代分析法の例を一つ上げよ。また、その原理についてアイソクロンを図示しながら説明せよ。

（２）ヨハネス・ケプラーは、ティコ・ブラーエーの惑星の観測を整理して経験的に三つの法則を求めた。第１法則は「惑星は太陽を一つの焦点とする楕円軌道を描く」、第２法則は「惑星の動径ベクトルの描く面積速度は一定」である。以下の小問に答えよ。

a）ケプラーの第３法則を記せ。

b）下図は、太陽系の惑星に関して、それぞれの主要な衛星の軌道半径と軌道周期のデータをプロットしたものである（ただし、衛星が円軌道を描くと近似している）。なぜ惑星ごとに直線が異なるのか、数式を用いて説明せよ。

c）火星の衛星と木星の衛星のデータは、それぞれどれに対応するか？　惑星Ａの衛星〜惑星Ｆの衛星の中から選べ。



[5]

以下に記す設問(ア)から(オ)について、3つを選択し、解答せよ。

(ア)かつて地球において多種類の生物が同時期に絶滅した“大量絶滅”イベントが数度生じたと考えられている。このうち、ペルム紀末期に生じた大量絶滅について、絶滅した代表的な生物を答えよ。さらに、大量絶滅の原因について考えられている説およびその地質学的根拠を5-10行程度で述べよ。

(イ)堆積岩のフィールド調査にて、地層の上下判定に用いられる堆積構造を4つ説明せよ。適宜、図を用いても構わない。

(ウ)タービダイト(turbidite)とはどのような地層のことであるか、特徴的な堆積構造を含めて、5-10行程度で解説せよ。適宜、図を用いても構わない。

(エ)内陸型地震の震源は、一般に地下15 km以浅であることが多い。この原因について、温度・圧力に依存した岩石の変形様式に着目して、5-10行程度で解説せよ。

(オ) 堆積物や岩石中に含まれる水は、それらの変形挙動に大きな影響を与える. この具体例を 3 つ挙げて説明せよ。また、岩石中の水の状態や分布、量などを分析する方法をその測定原理と併せて、1 つ挙げて説明せよ。