理学研究科博士前期課程 (物理学専攻・宇宙地球科学専攻) 入学試験問題

物 理 学

平成 22 年 8 月 25 日

1 から 4 までのすべての問題に解答せよ。解答用紙は問題ごとに一枚とし、それぞれに氏名・受験番号・問題番号を書くこと。

問題 1

図 1 のような寸法の、おもりと腕と針からなるやじろべえがある。このやじろべえの針の先端（支点）は台座に接していて、おもりは質量 m の質点と見なすことができ、腕と針の部分の質量は無視できるほど小さい。また、やじろべえのおもりと腕と針は同一平面上にあり、おもりと腕は針に対して対称で、運動によるやじろべえの変形や支点のずれはないものとする。

初期状態では針は鉛直で、やじろべえは静止している。いま、支点を原点として鉛直に z 軸をとる。また、腕と針とおもりが yz 面内に配置するように y 軸をとり、y 軸および z 軸と垂直に x 軸をとる。針と z 軸とのなす角を θ として、x 軸あるいは y 軸を回転軸とした場合の運動について考える。なお、(6) 以外ではやじろべえの運動に摩擦や抵抗はないものとして、以下の問いに答えよ。また、重力加速度は g とし、θ が微小角度（すなわち $|\theta| \ll 1$）の場合は $\sin\theta \simeq \theta$ と近似してよい。

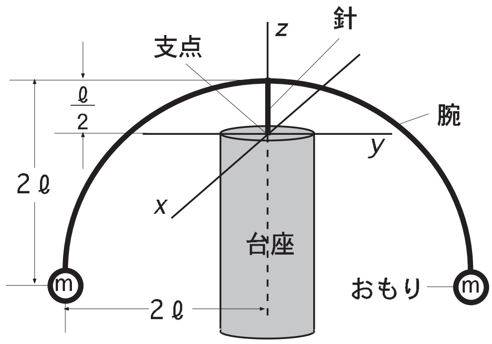

図 1

(1) 初期状態での重心の座標は $\left(0, 0, -\dfrac{3\ell}{2}\right)$ である。重心の位置を考慮し、やじろべえを任意の方向に微小角度（θ_0）傾けたときの位置エネルギー U を、初期状態を基準として求めよ。また、そのことから、このやじろべえが安定でたおれることがないことを簡潔に説明せよ。

(2) このやじろべえの x 軸および y 軸を回転軸とした場合の慣性モーメントをそれぞれ求めよ。

(3) このやじろべえに力を加え、支点を中心に x 軸を回転軸として微小角度傾ける。このとき、やじろべえを x 軸のまわりに回転させる向きに働く力のモーメントの大きさを求め、θ についての運動方程式を示せ。

(4) x 軸を回転軸とした振動の周期を求めよ。

(5) 同様に、支点を中心に y 軸を回転軸として微小角度傾けたとき、θ についての運動方程式を示し、振動の周期を求めよ。

(6) このやじろべえの運動に、空気抵抗がある場合を考えよう。なお、空気抵抗はおもりの速度に比例するとし、その比例定数を μ とする。(つまり、抵抗力 $\boldsymbol{f}$ は、速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ を用いると $\boldsymbol{f} = -\mu \boldsymbol{v}$ である。) このやじろべえを微小角度 (θ)、x 軸あるいは y 軸を回転軸として傾けるとする。やじろべえが振動せずに初期状態 ($\theta = 0$) に近づくとき、μ はどのような範囲となるか、x 軸および y 軸を回転軸とした場合について、それぞれ示せ。

つぎに、図2のように、やじろべえの頭部として、質量が M (ただし $M < 3m$) で長さ ℓ の均質な円柱を取り付けた場合を考える。ただし、支点を中心とした運動に対する頭部の x 軸を回転軸とした慣性モーメントを I とし、やじろべえの運動に摩擦や抵抗はないものとする。

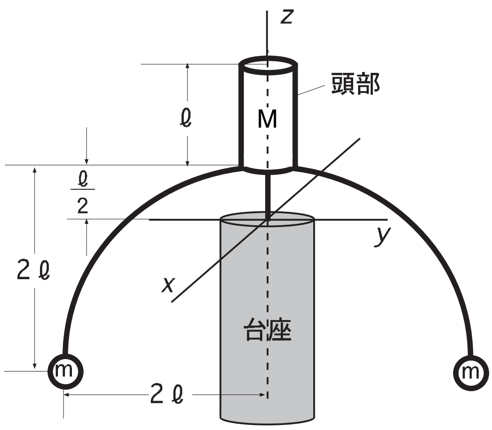

図2

(7) 図2のやじろべえの x 軸を回転軸とした振動に対するラグランジアンを θ および $\dot{\theta}$ の関数として表せ。

(8) x 軸を回転軸とした微小振動について、オイラーラグランジュ方程式を示し、振動の周期を求めよ。

問題 2

図１のような、内側は円柱状の導体（直径 $2a$）、外側は厚さの無視できる円筒形の導体（内径 $2b$、内側の導体と共通の中心軸をもつ）からなる長いケーブル（同軸ケーブル）がある。図のようにケーブルと平行に z 軸をとり、ケーブルの端の効果は無視できるものとする。また、(8) 以外において導体間の空間は真空であるとする。なお、真空の誘電率を ε_0、真空の透磁率を μ_0 とする。

I. 内側の導体が単位長さ当たり電荷 Q をもち、外側の導体が単位長さ当たり電荷 $-Q$ をもつように、それぞれ帯電しているとしよう。

(1) 内側と外側の導体に挟まれた空間において、中心軸からの距離 r の位置における電場の大きさ $E(r)$ を求めよ。

(2) 外側の導体に対する内側の導体の電圧 V と、ケーブルの単位長さ当たりの電気容量 C を、a、b、Q および ε_0 のうち必要なものを用いて表せ。

II. 次に、同じ大きさの直流電流 I が内側の導体を $+z$ 方向に、外側の導体を $-z$ 方向に流れているとしよう。

(3) 内側と外側の導体に挟まれた空間において、中心軸からの距離 r の位置における磁束密度の大きさ $B(r)$ を求めよ。

(4) 図１のような、中心軸を含む平面内にある長方形 Γ（z 軸方向の長さ Δz、z 軸に垂直方向の長さ $b-a$）を考え、それを通る磁束を $\Delta\Phi$ とする。このとき、$\Delta\Phi = L\Delta z I$ で定義されるケーブルの単位長さ当たりのインダクタンス L を、a、b および μ_0 を用いて表せ。

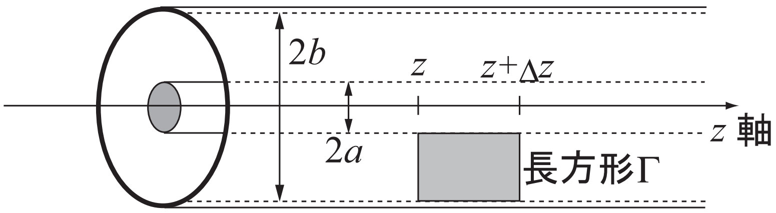

図１

III. 今度は、図２のように、ケーブルの左端に角振動数 ω の交流電圧を加えたとしよう。ここでは、主モードと呼ばれる、導体間の空間における電場および磁場が z 成分をもたない場合について考えよう。座標 z および時刻 t において、内側および外側の導体がもつ単位長さ当たりの電荷をそれぞれ $Q(z,t)$、$-Q(z,t)$ とし、内側および外側の導体を $+z$ 方向に流れる電流をそれぞれ $I(z,t)$、$-I(z,t)$ とする。このとき、座標 z、中心軸からの距離 r および時刻 t における電場 $E(z,r,t)$ の r に関する積分 $V(z,t) = \int_a^b E(z,r,t)dr$ に関して、I と同様に $Q(z,t) = CV(z,t)$ の関係が成り立つ。また、長方形 Γ を通る磁束 $\Delta\Phi(z,t)$ に関して、Δz の１次の程度で II と同様に $\Delta\Phi(z,t) = L\Delta zI(z,t)$ の関係が成り立つ。以下の解答にケーブルの単位長さ当たりの電気容量やインダクタンスが必要な場合、C や L の文字をそのまま使用して答えよ。

(5) 長方形 Γ の辺に沿って生じる誘導起電力を考えて、z と $z+\Delta z$ の位置における V の差 $\Delta V = V(z+\Delta z,t) - V(z,t)$ をインダクタンス L と電流の時間変化 $\dfrac{\partial I}{\partial t}$ を用いて表せ。これより、ある場所 z における $\dfrac{\partial V}{\partial z}$ と $\dfrac{\partial I}{\partial t}$ との間に成り立つ関係を示せ。

(6) z と $z+\Delta z$ の位置における電流の差 $\Delta I = I(z+\Delta z,t) - I(z,t)$ と、この２つの位置の間にある電荷の時間変化との関係（電荷の保存則）から、ある場所 z における $\dfrac{\partial I}{\partial z}$ と $\dfrac{\partial V}{\partial t}$ との間に成り立つ関係を示せ。

(7) V は一定の速さ v でケーブルを波動として伝播することを示せ。その波の速さ v、波長 λ はいくらか。

(8) 導体間の空間を誘電率 ε、透磁率 μ の絶縁体で満たすと、V の波の速さ v' は v の何倍となるか。

(9) 内側および外側の導体がそれぞれ単位長さ当たりの電気抵抗 R をもつとき、V の z 依存性を計算し、$R \ll \omega L$ の場合について図示せよ。ただし、導体間の空間は真空とする。

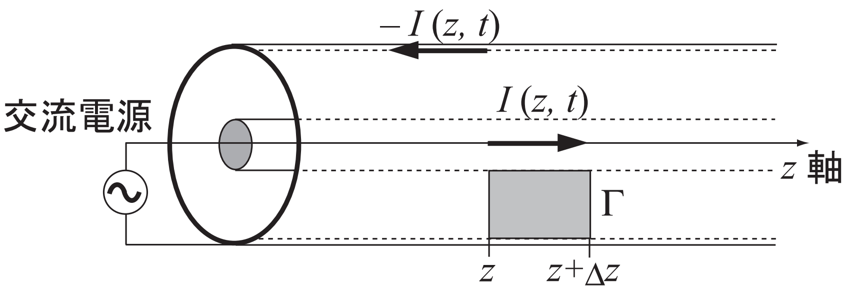

図２

問題3

球対称なポテンシャル $V(r)$ $(r=\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ の中におかれた、質量 M の粒子の量子力学的な運動を考察したい。ハミルトニアンは $H=\dfrac{\boldsymbol{p}^2}{2M}+V(r),\quad (\boldsymbol{p}^2=p_x^2+p_y^2+p_z^2)$ によって与えられる。p_x、p_y、p_z は運動量演算子の x、y、z 成分である。以下の問に答えよ。

(1) ハミルトニアン H は3つの演算子 $L_x=yp_z-zp_y,\ L_y=zp_x-xp_z,\ L_z=xp_y-yp_x$ と交換する。このことを L_x の場合について示せ。

(2) 球面極座標でラプラシアンは $\nabla^2=\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial}{\partial r}\right)-\dfrac{\boldsymbol{L}^2}{\hbar^2 r^2}$ と書ける (ここで $\boldsymbol{L}^2=L_x^2+L_y^2+L_z^2$ は、r によらない演算子である)。角運動量が保存する場合、時間に依存しない定常状態のシュレーディンガー方程式 $H\psi=E\psi$ の固有波動関数 ψ は、動径波動関数 $R_l(r)$ と球面調和関数 $Y_{lm}(\theta,\phi)$ を用いて $\psi(r,\theta,\phi)=R_l(r)Y_{lm}(\theta,\phi)$ の様に変数分離することができる。ここで l は方位量子数、m は磁気量子数である。動径波動関数を $R_l(r)=\dfrac{u_l(r)}{r}$ のように表すと、$u_l(r)$ は

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{d^2u_l}{dr^2}+\frac{\hbar^2}{2M}\frac{l(l+1)}{r^2}u_l+V(r)u_l=Eu_l \tag{1}$$

を満足することを示せ。その際、球面調和関数の性質 $\boldsymbol{L}^2Y_{lm}=\hbar^2 l(l+1)Y_{lm}$ を使ってよい。

以下ではS波、すなわち軌道角運動量がゼロ $(l=0)$ の場合を考える。このとき $u(r)\equiv u_0(r)$ が満たすシュレーディンガー方程式は

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{d^2u}{dr^2}+V(r)u=Eu \tag{2}$$

となる。

(3) $V(r)=0$ の場合に、$u(r)$ を求めよ。ただし規格化は考えなくてよい 。原点 $r=0$ で $\dfrac{u(r)}{r}$ は有限の値をとることに注意せよ。

(4) 図1 に示すように、$V(r)$ として一定の深さ V_0 と広がり a をもつ井戸型の引力ポテンシャルを考える。ここで V_0 と a はともに正の数とする。エネルギーが E である束縛状態が存在するとして、$r\le a,\ r>a$ それぞれの領域で $u(r)$ を求めよ。ここでも、規格化は考えなくてよい。

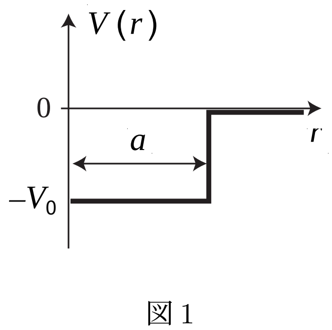

図1

(5) 束縛状態のエネルギー E を決めるためには、$r = a$ での波動関数の接続条件を用いればよい。その式が

$$\alpha \cot \alpha = -\beta \tag{3}$$

と書けることを示し、α, β を $M, V_0, a, E, \hbar$ を用いて表せ。またこのとき $\alpha^2 + \beta^2 = \dfrac{2MV_0 a^2}{\hbar^2}$ が満たされることを示せ。

(6) 束縛状態が存在するためには、十分な大きさの引力ポテンシャルが必要になる。例えば広がり a を固定すると、V_0 がある値より大きい場合に束縛状態が存在する。図 2 に示された $y = -x \cot x$ のグラフを用いて、束縛状態が存在するために必要な V_0 の最小値を求めよ。

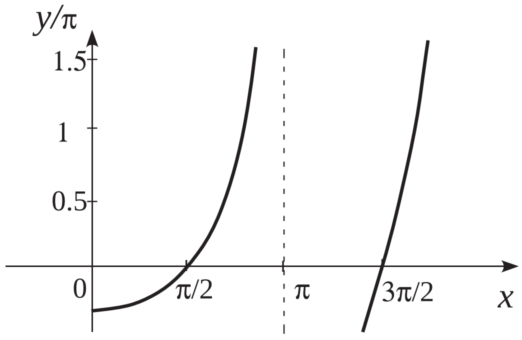

図 2

(7) ポテンシャルの広がりと深さを固定しておくと、質量の大小によって、粒子の束縛状態における束縛エネルギー（束縛エネルギーは $-E$ で定義される）が変わる。前問までの結果を参考に、質量の大きい場合と小さい場合のどちらにおいて、基底状態の束縛エネルギーが大きいかを考察せよ。さらにこのことを不確定性関係を使って定性的に説明せよ。

問題 4

荷電粒子の外部磁場に対する応答によって生じる磁性を考えてみよう。電荷 q $(q>0)$ を持つ質量 m の荷電粒子の運動が、xy 平面内に拘束されているとする。大きさ B の一様な磁束密度が z 軸方向に正の向きにかかっているとしよう。以下では荷電粒子の運動による電磁場の放射は無視し、ボルツマン定数を k、プランク定数を h とし、$\hbar=\dfrac{h}{2\pi}$ とする。

I. まず、古典的な一体問題を考えよう。

(1) 初速度の大きさ v を持つ荷電粒子の運動は、xy 平面内の円運動となる。円運動の角振動数 ω、半径 r を q,m,B,v のうち必要なものを用いて表せ。

(2) 時刻 $t=0$ での運動量が $\boldsymbol{p}(0)=(c_x,c_y)$ であったとき、任意の正の時刻 t での運動量 $\boldsymbol{p}(t)=(p_x(t),p_y(t))$ を求めよ。

(3) この運動は、外部磁場と逆向きの磁気モーメントを生成することを簡潔に述べよ。

このように古典的な一体問題では外部磁場と逆向きの磁気モーメントが生成される。

荷電粒子が多数存在するとき、その全磁気モーメントを磁化と呼び、磁化が負ならば、系は「反磁性」を示すという。今の系が反磁性をもつかどうか統計力学的に考えてみよう。絶対温度 T の熱浴と相互作用している N 個の荷電粒子が、xy 平面内の一辺 L の正方形領域に閉じ込められているとする。また荷電粒子間の相互作用は無視できるとする。

(4) 磁性体の熱力学第一法則は、磁性体の体積変化を無視すると、今の場合、内部エネルギー U、エントロピー S、磁化 M とそれらの微小変化を使って、$dU=TdS+BdM$ と表現できる。自由エネルギー F が $F=U-BM-TS$ となるとき、磁化 M を、F の偏微分として表せ。

(5) 外部磁場のあるときの分配関数を求めよ。

(6) 磁化 M を求めよ。

II. **I** で考察した N 個の荷電粒子が正方形領域に閉じ込められている系を量子力学的に考察しよう。古典的な荷電粒子の運動が円運動であるため、量子系の一体問題では一次元的な調和振動子と同等であると見なせる。このときエネルギー準位は (1) で求めた ω を使って、$E_n=\hbar\omega\left(n+\dfrac{1}{2}\right),\quad (n=0,1,2,\dots)$ と表される。以下では ω を用いて解答してもよい。また必要に応じて、大きな N に対して $\ln N!\simeq N\ln N-N$ という近似を用いよ。

(7) 外部磁場のない時の一粒子エネルギー状態密度 $D(E)$ は $D(E)=\dfrac{mL^2}{2\pi\hbar^2}$ である。外部磁場が加わっても状態の総数は変化せず、量子化されたエネルギー準位を中心とする $\hbar\omega$ のエネルギー幅にふくまれる連続状態がそれぞれの離散準位に分配されるとして、一つの準位あたりの状態数を求めよ。

(8) 温度が高く、系はマクスウェル・ボルツマン統計に従うとして、自由エネルギー F を求めよ。

(9) 今の場合、量子性により古典的な場合と異なる磁化が生じる。磁化 M を求めよ。