理学研究科博士前期課程 (物理学専攻・宇宙地球科学専攻) 入学試験問題

物 理 学

平成 20 年 8 月 25 日

問題 1 から問題 4 までのすべての問題に解答せよ。解答用紙は問題ごとに 1 枚とし，それぞれに氏名・受験番号・問題番号を書くこと。

問題 1

無重力状態にある宇宙ステーション中のブーメランの運動を考える（図 1)。ブーメランは対称軸の周りに 90 度間隔でずれた 4 枚の同じ羽根 A，B，C，D でできている。1 枚の羽根の重さは M，長さは ℓ で，ブーメラン全体の重さは $4M$ である。ある時刻 t でブーメランは空中を飛んでおり，重心 G の速さは V であった。ブーメランはその対称軸周りを回転角速度 ω で自転しており，重心 G の速度ベクトルと対称軸は直交していた。重心 G が進む向きを y 軸の正の方向，対称軸が z 軸方向になるように座標を取る。つまり時刻 t で羽根は x–y 平面内で回転をしている。図 1 で z 軸の正の方向は紙面に垂直かつ手前の向きとなっている。また羽根 A と x 軸の正の方向のなす角度はこの瞬間 ωt であった。

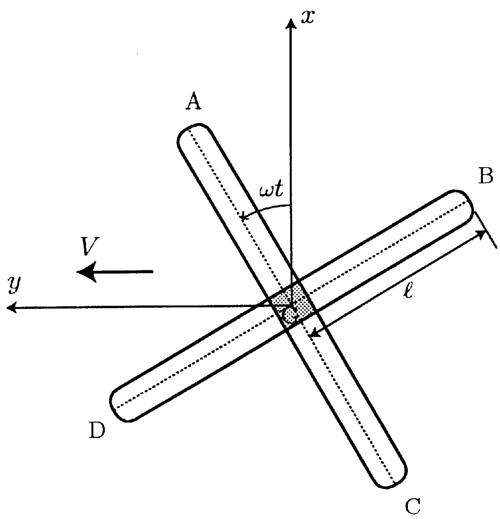

図 1

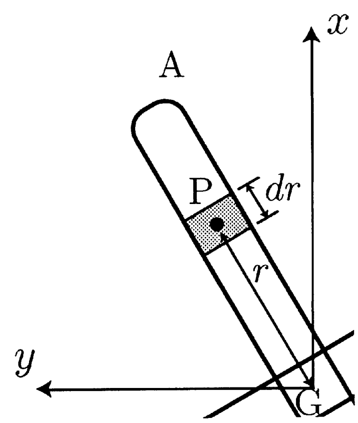

図 2

(1) 重心 G から距離 r の羽根 A 上の点 P を中心とする長さ dr の微小部分（図 2 で灰色で表されている部分，以下「微小部分 P」とする）の対称軸周りの角運動量の大きさを求めよ。ただし，羽根の密度は一様で，羽根は十分細く長さ ℓ の線とみなすことができるものとする。したがって羽根の交わる部分（図 1 の灰色の部分），羽根の太さ，角の丸みなどの効果は計算で具体的に考慮しなくてよい。

(2) ブーメラン全体の対称軸周りの自転の角運動量の大きさ L を求めよ。

(3) 宇宙ステーション中に空気がない場合，重心 G はどのような運動をするか 15 文字以内で書け。

以下宇宙ステーション中は空気で満たされているものとする。空気は宇宙ステーションに対して静止している。この場合，空気との相互作用による揚力でブーメランの進行方向は変化する（図 3)。ただしその変化は，対称軸周りにブーメランが 1 自転する時間内には十分小さい。時刻 t にブーメランに働く力を考えてみよう。

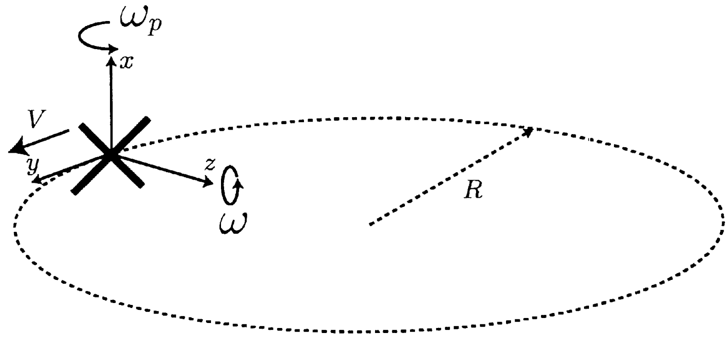

図 3

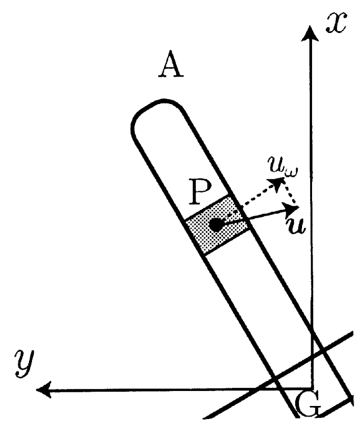

図 4

(4) ブーメランの重心運動と回転運動により，羽根から見ると羽根の両側には羽根の動きと反対方向に空気が流れる（図 4）。ただし羽根によって周辺の空気は大きく乱されることなく，宇宙ステーションから見て空気はほぼ静止しているものとする。時刻 t に**点 P から見たときの**，空気の流れの x–y 平面内の相対速度ベクトル $\boldsymbol{u}$ の羽根の軸に垂直な成分の大きさ u_ω を求めよ。答えは V，ω，t，r のうち必要なものを用いて書け。

(5) 羽根の断面は飛行機の翼状となっており，羽根はその周辺の空気の流れに垂直な方向に揚力を受ける。図 1 の場合，揚力は z 軸の正の方向に，羽根の単位長さ当たり cu_ω^2 (c は定数) と表すことができる。羽根 A 上の微小部分 P が時刻 t に受ける揚力の大きさ dF を求めよ。

(6) それぞれの羽根が x 軸となす角が違うことに注意して，ブーメラン全体が受ける揚力の大きさ F を求めよ。答えは c，ℓ，ω，V のうち必要なものを用いて書け。

(7) 時刻 t にブーメランが揚力により受ける重心 G の周りの力のモーメントのうち，羽根 A 上の微小部分 P の寄与 $d\boldsymbol{N}$ を求めよ。x，y，z 成分のそれぞれについて，答えは c，u_ω，ω，r，t のうち必要なものを用いて書け。

(8) ブーメラン全体が揚力により受ける重心 G の周りの力のモーメント $\boldsymbol{N}$ を求めよ。x，y，z 成分のそれぞれについて，答えを c，ℓ，ω，V のうち必要なものを用いて書け。また $\boldsymbol{N}$ とブーメランの対称軸周りの自転の角運動量ベクトル $\boldsymbol{L}$ のなす角を答えよ。

力のモーメント $\boldsymbol{N}$ は，角運動量ベクトル $\boldsymbol{L}$ の向きを変えるように働くので，ブーメランは宇宙ステーションに対して静止した系から見ると x 軸周りにもゆっくり回転する（歳差運動 図 3）。重心 G が半径 R の円運動を行ってブーメランが投げた人のもとに戻ってくるためには，歳差運動の角速度 $\omega_p = N/L$ ($N = |\boldsymbol{N}|$) と，軌道運動の角速度 $\Omega_R = V/R$ が一致する必要がある（条件 1）。この条件により，ブーメランの対称軸は常に重心 G の円軌道の中心を向く。さらに軌道運動の遠心力 $4MV^2/R$ が揚力 F と一致する必要がある（条件 2）。以下このような場合について考える。

(9) 条件 1 より，R を M，ℓ，c を用いて書き表せ。

(10) 条件 1，2 より，$V/(\omega\ell)$ を数字で表せ（小数にする必要はない）。

問題2

分子を吸着する性質を持つ薄い膜（吸着面）がある。体積 V の密閉容器の中に，同じ種類の単原子分子 N 個からなる気体と，分子がまったく付着していない清浄な吸着面を封入してしばらく待ったところ，吸着面に付着している分子（吸着分子）と，付着していない分子（気体分子）を合わせた分子系全体が温度 T の熱平衡状態に達した（図1）。以下では，この熱平衡状態の理解を目標に考察を進めよう。簡単のために，吸着しているか否かに関わらず分子間の相互作用エネルギーを無視し，密閉容器の壁面に分子が付着する効果も無視する。また，吸着面はその表面全体が気体にさらされるように注意して置かれているものとする。

I. まず，体積 V の密閉容器に吸着面が入っておらず，N_g 個の分子からなる気体だけが存在し，これが温度 T の熱平衡状態にある場合を考察しよう。以下では，この気体の圧力 p と化学ポテンシャル μ が，

$$p = \rho k_{\mathrm{B}} T$$
$$\mu = k_{\mathrm{B}} T \ln\left(\rho \lambda^3\right)$$

と書けることを仮定する。ここで，k_{B} はボルツマン定数，$\rho = N_{\mathrm{g}}/V$ は分子の数密度であり，長さの次元を持つ量 λ は正の定数 a を用いて $\lambda = a/\sqrt{k_{\mathrm{B}} T}$ と表される。

(1) 気体のヘルムホルツの自由エネルギーを $F_{\mathrm{g}}(T, V, N_{\mathrm{g}})$ とすれば p と μ は F の偏微分を用いて書き表せる。この事実から導かれるマックスウェルの関係式を書き下せ。さらに上で与えた p および μ の表式が，このマックスウェルの関係式を満たしていることを確認せよ。

(2) F_{g} は示量変数であるから，任意の $x > 0$ に対して，

$$F_{\mathrm{g}}(T, xV, xN_{\mathrm{g}}) = xF_{\mathrm{g}}(T, V, N_{\mathrm{g}})$$

を満たすはずである。上式の両辺を x で微分することによって得られる式に注意して，$F_{\mathrm{g}}(T, V, N_{\mathrm{g}})$ の表式を求めよ。答えは λ を用いて表してよい。

II. 次に N_{a} 個の分子が吸着した吸着面が，孤立した状況下で（即ち N_{a} が変化しないという条件下で）温度 T の熱平衡状態にある場合を考察する。以下ではモデル化を行って，吸着面が表面に M 個の吸着点を持ち，各吸着点には分子が1個まで付着できるとしよう．ただし，吸着点に付着した分子は，ϵ_0 を正の定数として，$-\epsilon_0$ のエネルギーを持つと仮定する。

(3) M 個の吸着点に N_{a} 個の分子を配置する仕方が何通りあるか数えよ。

(4) 吸着分子系の正準分配関数 $Z_{\mathrm{a}}(T, M, N_{\mathrm{a}})$ 及びヘルムホルツの自由エネルギー $F_{\mathrm{a}}(T, M, N_{\mathrm{a}})$ を計算せよ。ただし F_{a} については，$M \gg 1$，$N_{\mathrm{a}} \gg 1$，$M - N_{\mathrm{a}} \gg 1$ を仮定し，自然数 $n \gg 1$ に対して成り立つスターリングの公式 $\ln n! = n \ln n - n$ を用いて漸近評価した結果を記せ。

III. 体積 V の密閉容器内に気体と吸着面の両方が入っており，気体分子と吸着分子を合わせた全系が温度 T の熱平衡状態にあるとする。この時，気体と吸着面の間で分子のやり取りがあるが，気体分子数 N_{g} と吸着分子数 N_{a} の和（全分子数）$N = N_{\mathrm{a}} + N_{\mathrm{g}}$ は確定していて変化しない。以下では $M < N$ を仮定する。

(5) 気体分子と吸着分子を合わせた全分子系の正準分配関数 $Z_{\mathrm{tot}}(T, V, M, N)$ を，気体の正準分配関数 $Z_{\mathrm{g}}(T, V, N_{\mathrm{g}})$ と吸着分子系の正準分配関数 $Z_{\mathrm{a}}(T, M, N_{\mathrm{a}})$ を用いて書き表せ。

(6) ここで最大項の近似を用いる。つまり，吸着分子数が N_{a} である状態を見出す確率 $P(N_{\mathrm{a}})$ を最大にする N_{a} の値が，N_{a} の熱力学的な平均値 $\overline{N}_{\mathrm{a}}$ を与えると考える。この近似は，N_{a} の平均値からの揺らぎが十分小さければ正確である。この近似に基づいて $\overline{N}_{\mathrm{a}}$ を決定する式を F_{g} と F_{a} の偏微分を用いて書き表せ。

(7) (2)，(4) および (6) の結果を用いて，吸着面の被覆率 $\theta = \overline{N}_{\mathrm{a}}/M$ を求めよ。結果は温度 T と気体の圧力 p の関数として表せ。その際，気体の化学ポテンシャルを T と p の関数として表し直したものが，

$$\mu = k_{\mathrm{B}}T \ln\left(\frac{pa^3}{(k_{\mathrm{B}}T)^{5/2}}\right)$$

と書けることに注意せよ。

IV. (7) で得た結果を正準集団ではなく，大正準集団の考え方を用いて導こう。そのために，$N/M \to \infty$ の極限をとる。この時気体は，吸着分子系に対して化学ポテンシャル一定の「粒子だめ」として振舞うので，温度 T と化学ポテンシャル μ が指定された環境下で，吸着分子系の熱平衡状態を考察すればよい。

(8) この吸着分子系の熱平衡状態は，相互作用しないフェルミ粒子系との類似性に着目することによって，見通し良く取り扱うことができる。この類似性に着目して，被覆率 θ を T と μ の関数として求めよ。

得られた結果を T と p の関数として書き直すと，(7) の結果が再現される。

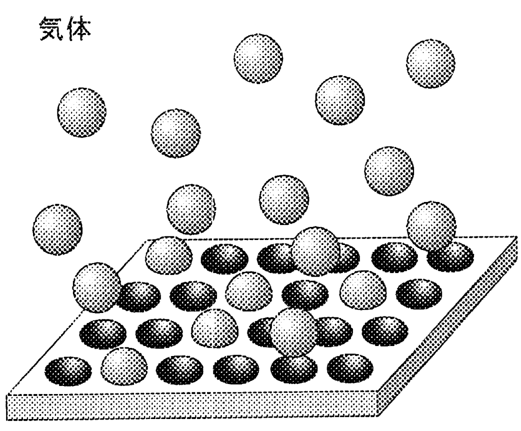

図 1

問題 3

I. 図 1 のように真空中で外半径が a で内半径が b の直線導線に定常電流 I が流れている。この定常電流をになう電子を伝導電子と呼ぶ。

(1) 伝導電子の密度と速度が導体内で一様であるとして，磁場 B の大きさを，導体の中心からの距離 r $(0 \leq r < \infty)$ の関数として求め，図に描け。ただし，導線の透磁率を真空と同じ μ_0 とする。

(2) 導体内で中心から r $(b < r < a)$ の距離にある伝導電子（電荷：$-e$）に働く，磁場から受けるローレンツ力の大きさと方向を求めよ。ただし，伝導電子の密度を n_e とする。

(3) 定常電流が流れる導線内は, 磁場から受けるローレンツ力を打ち消すように負に帯電し，電場が生じる（ホール効果）。導線表面は正に帯電し，導線の外部 $(r > a)$ では電場はゼロになる。導線の表面付近の伝導電子に働く力のつりあいを考えることにより，導線表面での電荷面密度 σ を求めよ。ただし，真空の誘電率を ε_0 とする。

II. 次に図 2 のように導線中心からの距離 R $(R > a)$ の点を，時刻 $t = 0$ の時に電流 I と同じ向きに導線と平行に走る荷電粒子を考える。粒子の電荷を q $(q > 0)$，静止質量を m とする。粒子の速度は相対論的な領域であり，粒子の運動量の大きさ p と全エネルギー E の間には，光速を c として，$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$ の関係がある。

(4) 粒子の運動量の大きさが p のとき粒子の速さ v を p と m と c を用いて表せ。ただし，粒子の 4 元運動量（$E/c, p_x, p_y, p_z$）と微小時間 Δt の間に粒子の軌跡が作る 4 元ベクトル $(c\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$ は比例することに注意せよ。つまり $E/c : p_x : p_y : p_z = c\Delta t : \Delta x : \Delta y : \Delta z$ である。

(5) 導線が静止している系（実験室系）で $t = 0$ の時に荷電粒子に働くローレンツ力の大きさを求めよ。

(6) (5) で得た力を時刻 $t = 0$ の時の粒子の静止系で観測したとしよう。静止系では，磁場によるローレンツ力が働かない代りに，導線に電荷線密度 λ が生じ，この電荷による電気的な力が働くと考えられる。この λ を ε_0，μ_0, I, p, m を用いて表わせ。ただし静止系で粒子に働く力の大きさは，(5) で求めた力の大きさに $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ をかけたものになっていることを用いて良い。

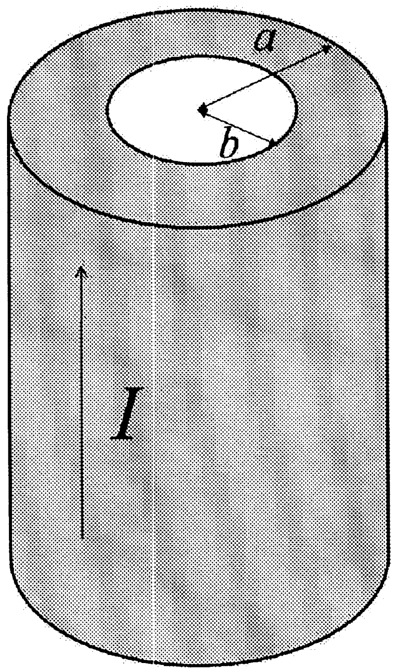

図1

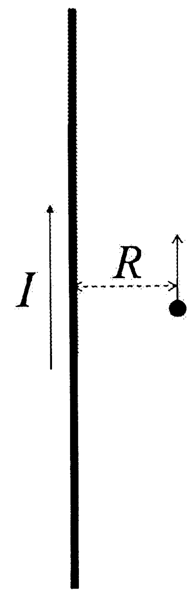

図2

問題4

量子力学の世界では，古典力学の世界では起こり得ない事が起こる。量子力学に特有の現象を，1次元の運動を通して調べてみよう。

図1のような，幅 a，深さ $V_0(>0)$ の1次元ポテンシャルのもとで，質量 m，正のエネルギー E を持つ粒子が，x が負の領域から入射し，右側へ進行している。ここで $x<0$，$0<x<a$，$x>a$ の領域を，それぞれ領域 (i)，(ii)，(iii) とする。ここでポテンシャルがゼロの領域 (i)，(iii) での波数を k_0，ポテンシャルが $-V_0$ の領域 (ii) での波数を k_{V} と表記する。

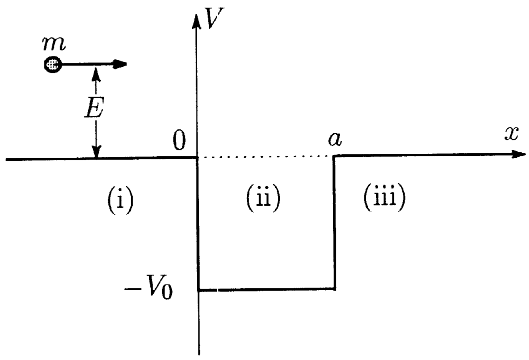

図1

(1) 領域 (i)，(ii)，(iii) での波動関数を $\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$，$\varphi_3(x)$ とし，時間に依存しないシュレディンガー方程式を書け。シュレディンガー方程式を解き，これらの波動関数を，波数 k_0，k_{V} を用いて書き表せ。ただし，領域 (i) での右進行波の振幅を A，左進行波の振幅を B，領域 (ii) での右進行波の振幅を C，左進行波の振幅を D，領域 (iii) での右進行波の振幅を G と表すことにする。

(2) 各領域の境界で，波動関数が滑らかにつながるための条件を書き表せ。

(3) このポテンシャルのもとでの，粒子の透過率 T を求めたところ

$$T = \frac{\boxed{\quad(\text{ア})\quad}}{\boxed{\quad(\text{ア})\quad} + \sin^2\left[\boxed{\quad(\text{イ})\quad}\right]}$$

のような形になった。(ア)，(イ) を埋める形で透過率 T を k_0，k_{V}，a を用いて表せ。ただし導出の過程も示せ。また k_0，k_{V} の代わりに，E，V_0，m を用いて透過率 T を表せ。

(4) 得られた透過率について，以下の問いに答えよ。ただしポテンシャルが浅い，つまり $(\hbar^2\pi^2)/(2ma^2) > V_0$ であるとする。

- **(a)** 入射エネルギー E がゼロに近づいたときの透過率 T の値を求めよ。
- **(b)** 入射エネルギー E が無限に大きいときの透過率 T の値を求めよ。
- **(c)** 透過率 T が1となる E の値を求めよ。
- **(d)** 透過率 T は，入射エネルギー E の関数としてどのように変化するか。(a)，(b)，(c) の結果を考慮し，変化の様子の概形を，横軸を E，縦軸を T としたグラフで示せ。

追加の注意

物理，問題 1 の (3) は，句読点を含めて15 文字以内で書け。

訂正

物理，問題 1 (7)

（誤）… 答えは c, u_ω, ω, r, t のうち …

（正）… 答えは c, u_ω, ω, r, t，dr のうち …

物理，問題 2 (1)

（誤）… p と μ は F の偏微分を用いて …

（正）… p と μ は F_g の偏微分を用いて …