理学研究科博士前期課程 (物理学専攻・宇宙地球科学専攻) 入学試験問題

物 理 学

平成 19 年 8 月 27 日

問題 1 から問題 4 までのすべての問題に解答せよ。解答用紙は問題ごとに一枚とし，それぞれに氏名・受験番号・問題番号を書くこと。

問題 1

図のように，半径 R の円筒状のあらい面上を，半径 a，質量 M，重心を通る軸のまわりの慣性モーメント I の一様な球が，滑らずに転がっている。球は，円筒の中心軸に垂直な面内で平面運動している。円筒の中心 O と球の重心を結ぶ直線が，鉛直線となす角度を θ とする。球に働く摩擦力の θ 方向成分を F，球に働く垂直抗力の大きさを N とする。球の重心を通り紙面に垂直な軸のまわりの，球の回転の角速度を ω とする。時刻を t，重力加速度の大きさを g として，以下の設問に答えよ。ただし，F, θ, ω は，図に示した方向 (反時計まわりの方向) を正とする。

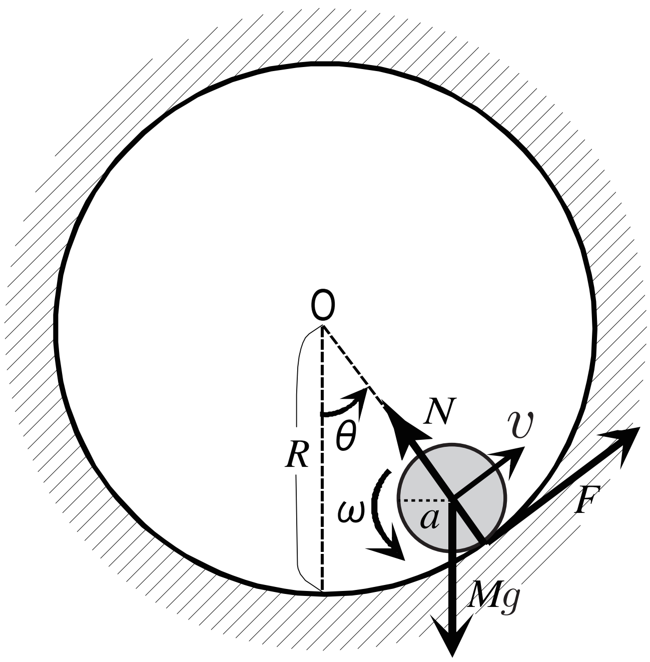
(1) 球の重心の速度の θ 方向成分を v とする。v を $\dfrac{d\theta}{dt}$ を用いて表せ。

(2) 球の重心の θ 方向の運動方程式 (v の微分方程式) を書け。また，球の回転の運動方程式 (ω の微分方程式) を書け。必要なら F, N を用いてもよい。

(3) 球の力学的エネルギーを，v, ω を用いて表せ。ただし，円筒面の底 $(\theta = 0)$ を，球の位置エネルギーの原点とする。

(4) 球が滑らない条件 $v = -\,a\,\omega$ を用いて，θ の満たす微分方程式を，F, N を含まない形で求めよ。

(5) 球が円筒面の底付近で微小振動する場合 $(|\,\theta\,| \ll 1)$，球の振動の周期 T を求めよ。



(6) 次に，振動の振幅が必ずしも微小でない場合を考えよう。θ の最大値が θ_0 $(0 < \theta_0 < \pi/2)$ のとき，球の力学的エネルギーが保存することより，$\dfrac{d\theta}{dt}$ を求めよ。また，振動の周期 T を求めよ。ただし，

$$f(x) = \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{\cos y - \cos x}}$$

を用いてもよい。

(7) 次に，今まで用いた球の中心部を球対称にくりぬいた球殻を，同じ円筒面で振動させた。ただし，振動の振幅は設問 (6) の場合と同じとする。振動の周期は設問 (6) の場合と比べて，長くなるか，短くなるか，変わらないか。理由とともに述べよ。

問題 2

図のように，z 軸に関し軸対称な磁場がある。磁束密度の z 軸方向の成分 B_z は，z 軸に垂直な平面内では一様で z だけの関数であり，z とともにゆるやかに増加する。

図に示したように，リング状の導体を，時刻 $t=0$ で，$z=0$ から z 軸に沿って投入する場合を考えよう。リング状導体は，半径が a, 半径方向の幅 Δa $(\Delta a \ll a)$ であり，軸方向の厚み h が十分薄く，リングの中心軸は常に z 軸に一致している。空気抵抗や重力，リングの変形や回転は無視できるものとして，以下の設問に答えよ。

(1) リング状導体の電気伝導度を σ として，リング１周あたりの電気抵抗 R を求めよ。

(2) リング状導体には，誘導電流が発生する。リング状導体の z 方向の速度が v $(v>0)$ であるとき，リングに現れる誘導起電力の大きさを求めよ。また，電流の大きさとその向きを求めよ。ただし，図のように投入方向から見て反時計まわりを正とし，誘導電流がつくる磁場は無視できるものとする。答は，$\dfrac{dB_z}{dz}$, v, a, R のうち必要なものを用いて表せ。

(3) リング状導体の半径方向の磁束密度成分 B_r は，B_z の勾配に関係づけられる。磁場に関するガウスの法則 (積分形) を用いて，

$$B_r = -\frac{r}{2}\frac{dB_z}{dz}$$

であることを示せ。ただし，r は z 軸からの距離である。

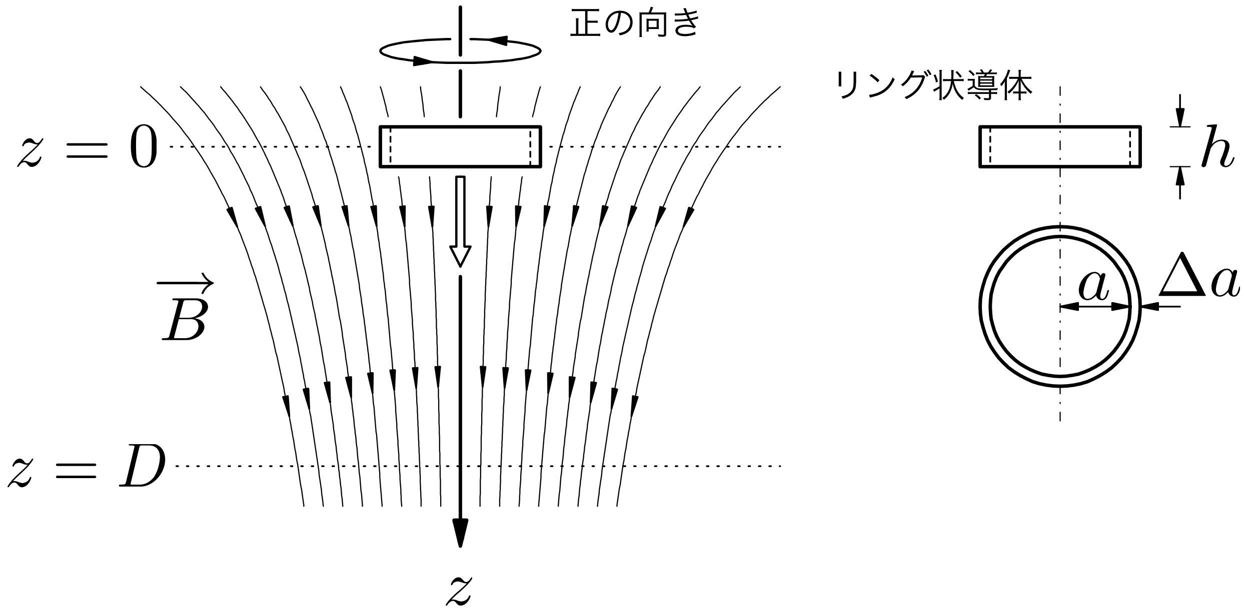
(4) 誘導電流は，磁場と相互作用しリング状導体に力をおよぼす。z 軸方向の力の大きさと符号を求めよ。答は，$\dfrac{dB_z}{dz}$, v, a, R を用いて表せ。

(5) 導体の密度を ρ として，設問 (4) の結果を用い，リング状導体の重心の運動方程式を書け。ただし，必要なら $\dfrac{dB_z}{dz}$ を用いてよい。

(6) B_z は，$0 \leqq z \leqq D$ の範囲で，$B_z = B_0 + B_1\dfrac{z}{D}$ のように増加するものとする。ただし，B_0, B_1, D は正の定数である。投入時のリング状導体の初速度を v_0 とする。$z=D$ にリング状導体が到達するために必要な v_0 に対する条件を求めよ。答は，σ, ρ, h, a, Δa, D, B_0, B_1 のうち必要なものを用いて表せ。

次に，半径 a，厚み h，密度 ρ，電気伝導度 σ である一様な円板を，$z=0$ から z 軸に沿って投入する場合を考えよう。ただし，円板の中心軸は常に z 軸と一致している。磁場は設問 (6) の磁場と同一である。

(7) 投入時の円板の初速度を v_1 とする。$z=D$ に円板が到達するために必要な v_1 に対する条件を求めよ。答は，σ, ρ, h, a, D, B_0, B_1 のうち必要なものを用いて表せ。



正の向き
リング状導体
$z = 0$
$\overrightarrow{B}$
$z = D$
z
h
a
Δa

問題 3

z 軸方向の一様な静磁場 $\overrightarrow{B} = (0, 0, B_0)$ 中のスピンの運動を，古典力学および量子力学で考察する。$\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ (h はプランク定数) として，以下の設問に答えよ。

I. 古典力学では，角運動量 $\overrightarrow{J} = (J_x, J_y, J_z)$ の時間変化は受けるトルクに等しいので，回転運動を記述する運動方程式は

$$\frac{d\overrightarrow{J}}{dt} = \overrightarrow{\mu} \times \overrightarrow{B}$$

となる。ここで，$\overrightarrow{\mu}$ は $\overrightarrow{J}$ により生じる磁気モーメントで，$\overrightarrow{\mu} = \gamma \overrightarrow{J}$ (γ は定数で $\gamma \neq 0$) と表される。

(1) 時刻 $t = 0$ で， $\overrightarrow{J} = (J_0, 0, 0)$ であった。運動方程式を解き，角運動量 $\overrightarrow{J}$ の時間変化を表す解を求めよ。

II. 量子力学では，角運動量は演算子である。スピン 1 の粒子のスピン角運動量 $\overrightarrow{J} = (J_x, J_y, J_z)$ は，$\overrightarrow{J} = \hbar \overrightarrow{S}$ で与えられ，$\overrightarrow{S} = (S_x, S_y, S_z)$ は，以下のように定義された行列である。

$$S_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad S_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

S_x, S_y, S_z は角運動量の交換関係 $[S_x, S_y] = iS_z, [S_y, S_z] = iS_x, [S_z, S_x] = iS_y$ を満たしている。スピン角運動量の各成分が 3 行 3 列の行列であるので，スピン 1 の粒子の波動関数 ψ は 3 つの成分を持ち，

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}$$

と表すことができる。また，$\overrightarrow{J}$ により生じる磁気モーメント $\overrightarrow{\mu}$ は，$\overrightarrow{\mu} = \gamma \overrightarrow{J}$ (γ は定数で $\gamma \neq 0$) と表される。静磁場中のスピンの運動は，次のハミルトニアンで記述される。

$$H = -\overrightarrow{\mu} \cdot \overrightarrow{B}$$

(2) ハイゼンベルク表示 (描像) のもとで，ハイゼンベルクの運動方程式を用いて，スピン角運動量の時間変化 $\dfrac{d\overrightarrow{J}(t)}{dt}$ を求め，I の古典的な運動方程式と同じ形になることを示せ。

(3) 時刻 $t = 0$ に，スピンが x 軸を向いているとする。すなわち，J_x の固有状態にあり，固有値が $+\hbar$ であった。この状態の規格化された波動関数 (固有ベクトル) を求めよ。

(4) シュレディンガー表示 (描像) における波動関数を考える。時刻 $t > 0$ における状態の波動関数を具体的に求めよ。

(5) 時刻 $t > 0$ における状態でのスピン角運動量 $\overrightarrow{J}$ の期待値を具体的に求めよ。

(6) 時刻 $t > 0$ に再び J_x を観測したとき，結果が $+\hbar$ になる確率を具体的に求めよ。

問題 4

3 次元空間中の一本の鎖状高分子を考える。鎖状高分子とは，単量体という分子を単位として，これらが鎖のように結合したものである。単量体の数が十分に大きいときは，鎖状高分子は熱力学の対象となる。以下，図 1 のように，高分子の端点間の距離を高分子の「長さ」とし，L と書く。また，長さ L を保つために外部から端点を引く力を，張力 X と定義する。温度を T，ボルツマン定数を k_{B} として，以下の設問に答えよ。

(1) 高分子の体積変化は十分に小さく，圧力がする仕事は無視できる。このとき，エントロピー S の変化 dS，内部エネルギー U の変化 dU，および長さ L を dL 変化させたときの仕事 XdL の間の関係式 (熱力学第一法則) を書け。

(2) マクスウェルの関係式，

$$\left(\frac{\partial\,(1/T)}{\partial L}\right)_U = -\left(\frac{\partial\,(X/T)}{\partial U}\right)_L$$

が成立することを示せ。

(3) 図 1 のように，長さ L が一定となるような状況で張力 X を測定したところ，温度依存性が

$$X = AT$$

となった。ここで，A は長さのみに依存する正の係数である。設問 (2) のマクスウェルの関係式を用いて，内部エネルギー U が温度のみの関数であることを示せ。

(4) 断熱的に十分ゆっくりと高分子を引き延ばすと，温度が上昇することを示せ。ただし，長さが一定のときの高分子の比熱は正である。

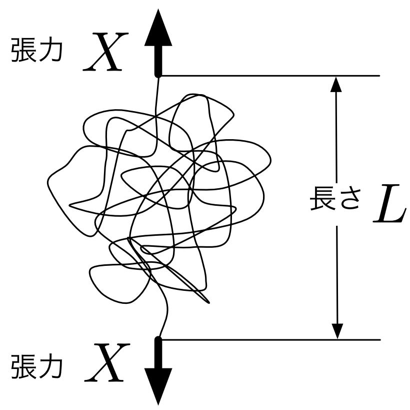


図 1

この高分子の張力と長さの関係を，統計力学を用いて求めよう。単量体の体積，絡まり合い，相互作用などを無視し，単量体の方向の自由度のみを取り扱う。図 2 のように，高分子の一方の端点を原点に固定し，張力をかける方向に z 軸を取る。単量体の長さを a，数を N とし，端から i 番目の単量体の向きが z 軸となす角を θ_i とする。高分子のもう一方の端の z 座標は，$L_z = \sum_{i=1}^{N} a\cos\theta_i$ で与えられる。

このときの状態数 $W(L_z)$ は，ディラックの δ 関数を用いて

$$W(L_z) = \int d\Omega_1 \int d\Omega_2 \ldots \int d\Omega_N \, \delta(L_z - \sum_{i=1}^{N} a \cos\theta_i)$$

で計算でき，これを用いて張力と長さの関係を求めることができる。ここで，$d\Omega_i$ は i 番目の単量体の 3 次元立体角の積分要素である。

(5) 状態数 $W(L_z)$ を直接計算するよりも，張力一定のアンサンブルを考えた方が，計算が簡単である。張力一定のアンサンブルにおける分配関数

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} dL_z \, \exp\left(\frac{XL_z}{k_B T}\right) W(L_z)$$

を具体的に計算せよ。

(6) L_z の期待値 $\overline{L_z}$ は，張力一定のアンサンブルでは高分子の長さ L と一致する。この分配関数から計算される自由エネルギー $G = -k_B T \log Z$ が，熱力学的に定義される $G = U - TS - XL$ と等しいことを，鞍点法を用いて示せ。ただし，今の場合，相互作用を考慮していないので，$U = 0$ である。また，$S = k_B \log W$ の関係がある。

(7) G の独立変数は X と T である。G の全微分式を考慮して，$\overline{L_z}$ を張力 X の関数として求めよ。また，張力が (i) 十分に弱い場合および (ii) 十分に強い場合に，$\overline{L_z}$ の近似式を求めよ。必要であれば，x が小さいときの $\tanh x$ の展開式，

$$\tanh x \simeq x - \frac{1}{3}x^3$$

を用いてよい。

(8) 設問 (7) の結果または物理的考察にもとづき，$\overline{L_z}$ と X の関係を，$\overline{L_z}$ を縦軸，X を横軸に取り図示せよ。特に，張力が十分に弱い場合および十分に強い場合における定性的な振舞いがわかるように示せ。

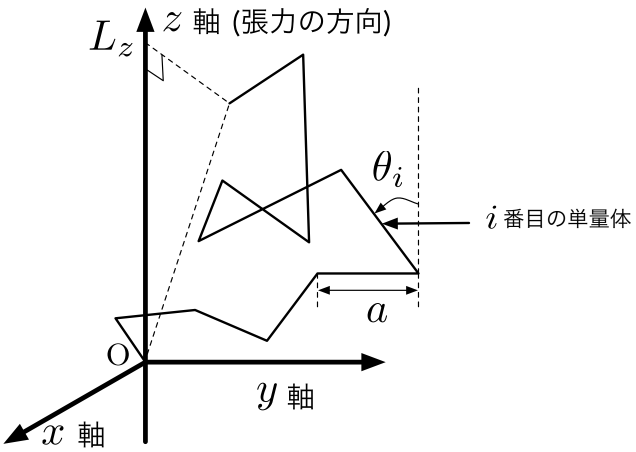


図 2

計算用紙