大学院前期（修士）課程（物理学専攻・宇宙地球科学専攻）入学試験問題

物 理 学

（平成１７年８月３０日）

１から４までのすべての問題に解答せよ。解答用紙は問題ごとに一枚とし、それぞれに氏名・受験番号・問題番号を書くこと。

問題１

黒体とみなせる微粒子に、一方向に進む光を照射した場合を考えよう。微粒子は光の吸収によって均一に加熱されるが、安定で分解しないものとする。このとき、微粒子は１光子あたり ε のエネルギーを吸収し、光の進行方向に運動量を受けとる。その後、微粒子はすみやかに同量のエネルギーの光を放出するが、この放射の方向はランダムで特定の方向性を持たない。光の速さを c とすると、結果的に微粒子は１光子当たり ε/c に相当する大きさの運動量を受けとる。単位時間当たりに微粒子が受けた運動量を輻射力とよぶ。

単位時間に L のエネルギーを等方的に放出する点光源からの光を受ける半径 a、密度 ρ の球状黒体微粒子について考察しよう。微粒子の光の吸収断面積は πa^2 であるとする。

（１）光源から $\vec{r}$ の位置に静止している微粒子が受ける輻射力 $\vec{F}_{\mathrm{rad}}$ を求めよ。

次に球状微粒子が太陽系内にあって、太陽と微粒子の間の万有引力、および太陽光による輻射力のみを受けると考えよう。太陽の質量を M、万有引力定数を G とする。また太陽は上記の点光源と見なせるものとする。

（２）輻射力は動径方向外向きにのみ働く。設問（１）で求めた微粒子が受ける輻射力の大きさが、万有引力と等しくなる条件を求めよ。

（３）太陽光の輻射力を受けながら軌道半径 r で円運動している質量 m の微粒子の太陽まわりの角運動量の大きさを示せ。

微粒子が太陽の束縛下で運動するとき、輻射力が動径方向外向きであるにもかかわらず、微粒子の角運動量を低下させ、その軌道半径を徐々に減少させる Poynting-Robertson 効果と呼ばれる効果が起こることが知られている。厳密には特殊相対論を用いて解く必要があるが、ここでは以下のように考えてみよう。

質量 m の微粒子が太陽系内で円軌道を描いているものとする。ある瞬間における微粒子の軌道接線方向の速さを $v(v \ll c)$ としよう。微粒子が光子（エネルギー ε）を吸収したとき、微粒子の軌道接線方向の運動量には変化がない。しかし微粒子の質量は吸収した光子のエネルギー分、ε/c^2 だけ増加すると考えられ、結局質量 m'、接線方向の速さ v' になったものと表記できる。次に微粒子から光が放出されるとき質量は m に戻り、また微粒子系で観測すれば光は等方に放射されることから、微粒子の軌道接線方向の速さは v' に保たれることがわかる。

（４）エネルギー ε の光を吸収する前の微粒子の角運動量の大きさを ℓ として、光吸収前と光放出後の間の角運動量の大きさの変化が、$\Delta\ell = -\ell\varepsilon/(mc^2)$ となることを示せ。ただし、$\varepsilon \ll mc^2$ である。

（５）微粒子は角運動量を失うことにより、公転周期程度の短時間では近似的に円軌道とみなせるものの、長時間では徐々にその軌道半径が減少するものと考えよう。設問 3)、4) の結果、および

$$\frac{d\ell}{dt} = \frac{d\ell}{dr}\frac{dr}{dt}$$

の関係を利用して、太陽系内で輻射力を受けている微粒子の軌道半径 r と時間 t に関する微分方程式を導け。

（６）設問 5) の結果を用いて、微粒子の軌道半径が R から $R/2$ になるまでの時間を求めよ。この範囲で微粒子は近似的に円軌道を描きながらゆっくりと軌道を変化させるものと考えてよい。

（７）上式が成立するものとして、地球軌道半径 $R_e(1.5 \times 10^{11}\mathrm{m})$ から $R_e/2$ まで微粒子の軌道が変化するために必要なおよその時間を求めよ。なお、$L = 4 \times 10^{26}$ J/s、$a = 1 \times 10^{-3}$ m、$\rho = 2.5 \times 10^{3}$ kg/m^3、$c = 3.0 \times 10^{8}$ m/s とせよ。

問題２

導体内での電磁場について調べてみよう。ここでは導体内の自由電子のみを考える。質量 m を持った電子が、電場 $\vec{E}$ による力と速度 $\vec{v}$ に比例した抵抗力 $-\gamma m\vec{v}$ を受けて運動すると考える。ここで、γ は比例定数である。電子の電荷を q として、以下の問いに答えよ。

（1）電子の運動方程式を書け。

（2）角振動数 ω で振動する一様な電場は $\vec{E}=\vec{E}(\omega)e^{-i\omega t}$ と与えられる。この振動電場のもとで前問の運動方程式を解いて、十分時間が経過した後の電子の速度 $\vec{v}$ を求めよ。本問および以下の問いでは物理量は複素表示で表わすものとする。

（3）前問で求めた結果を用いて、この導体内での電子による電流密度 $\vec{j}$ を求め、複素電気伝導率 $\sigma(\omega)$ を求めよ。ここで電子の数密度を n とする。電流密度を $\vec{j}=\vec{j}(\omega)e^{-i\omega t}$ とすると、$\sigma(\omega)$ は $\vec{j}(\omega)=\sigma(\omega)\vec{E}(\omega)$ で定義される。

（4）電流密度 $\vec{j}$ は、分極の時間変化 $\dfrac{\partial\vec{P}}{\partial t}$ と考えられ、分極の効果は電束密度 $\vec{D}$ に取り入れられる。ω で振動する $\vec{E}$ に対して、$\vec{D}=\vec{D}(\omega)e^{-i\omega t}$、$\vec{P}=\vec{P}(\omega)e^{-i\omega t}$ と定義すると、複素誘電率 $\epsilon(\omega)$ は $\vec{D}(\omega)=\epsilon(\omega)\vec{E}(\omega)=\epsilon_0\vec{E}(\omega)+\vec{P}(\omega)$ と定義される。このとき、$\epsilon(\omega)$ を ϵ_0 および、$\sigma(\omega)$ を含む式で表せ。ここで、ϵ_0 は真空の誘電率である。

平面電磁波は、ここで考えた電場や磁場の時間変化が空間的に伝わっていくものだが、これを取り扱うのがマックスウェルの方程式である。ここで求めた $\epsilon(\omega)$ は、平面電磁波についても用いることができる。そして、上記の設問で見てきたように、$\vec{j}$ の効果を取り込んだ $\vec{D}$ を用いることで、導体内の電磁場を真空中と同じ形のマックスウェルの方程式を用いて取り扱うことが出来る。

（5）平面電磁波の進行方向を z 軸方向にとり、電場は x 成分のみを持つとする。x 軸方向の単位ベクトルを $\vec{e}_x$ とすると、電場は $\vec{E}=E\vec{e}_x e^{ikz-i\omega t}$ と表される。分散関係（ω と k の関係式）を導け。導体の透磁率は真空の透磁率 μ_0 と同じとする。

（6）$\gamma\ll\omega_{\mathrm{p}}\le\omega$ の場合、k を ω、ω_{p}、μ_0、ϵ_0 を用いて表せ。このときの分散関係を ω を横軸に、k を縦軸にとって図示せよ。ここで、$\omega_{\mathrm{p}}=\sqrt{\dfrac{nq^2}{m\epsilon_0}}$ である。

（7）$\omega\ll\gamma\ll\omega_{\mathrm{p}}$ の場合、近似的に k^2 が純虚数となることを示せ。

（8）前問の条件が満たされる場合について k を求めて電場の振幅が e^{-1} だけ減衰する距離 δ を求めよ。

（9）銅の場合について、電磁波の周波数が $10\ [\mathrm{MHz}]$ のときの δ の大きさを有効数字２桁で求めよ。なお振動数が 0 の極限における銅の電気伝導率を $\sigma(0)=1.0\times10^{8}\ [\Omega\mathrm{m}]^{-1}$ とする。必要なら、$\mu_0=4\pi\times10^{-7}\ [\mathrm{Hm}^{-1}]$ を用いよ。

問題３

1 次元空間における質量 m の 1 粒子量子系の時間発展を考える。この系の、時間に依存しないポテンシャルを $V(x)$、ハミルトニアンを $\hat{H}$ とする。プランク定数を h、$\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ として、以下の問いに答えよ。ただし、結果だけでなく計算の過程も記せ。

時刻 $t = 0$ で座標表示の波動関数 $\Psi(x, 0)$ と、時刻 $t > 0$ での波動関数 $\Psi(x, t)$ とは

$$\Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t; x', 0)\Psi(x', 0)dx'$$

で関係づけられる。この積分核 $K(x, t; x', 0)$ を座標表示のプロパゲータという。

(1) ハミルトニアン $\hat{H}$ の、エネルギー固有値 E_ν に属するエネルギー固有状態を、座標表示の波動関数 $\psi_\nu(x)$ で表す。ν はエネルギー固有状態をラベルする量子数で、連続値をとるとし、$\psi_\nu(x)$ は、Dirac のデルタ関数を用いて

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\nu'}^*(x)\psi_\nu(x)dx = \delta(\nu - \nu')$$

と規格化されているとする。$\Psi(x, t) = \exp(-i\hat{H}t/\hbar)\Psi(x, 0)$ の $\Psi(x, 0)$ を固有関数系 $\{\psi_\nu(x)\}$ で $\Psi(x, 0) = \int c_\nu(0)\psi_\nu(x)d\nu$ と展開することによって、プロパゲータ $K(x, t; x', 0)$ を、E_ν と ψ_ν を用いた式で表せ。

(2) 自由粒子を考える。この場合、量子数 ν は波数 k であり、エネルギー固有値は $E_\nu = E_k = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m}$、規格化をおこなったエネルギー固有関数は $\psi_\nu(x) = \psi_k(x) = (2\pi)^{-1/2}\exp(ikx)$ となる。自由粒子のプロパゲータ $K_{\mathrm{free}}(x, t; x', 0)$ を、Fresnel 積分 $I \equiv \int_0^\infty \cos(s^2)ds = \int_0^\infty \sin(s^2)ds$ を含む式で表せ。

(3) ここで Fresnel 積分 I を複素積分を用いて計算する。複素数 z の複素関数 $\exp(-z^2)$ を、複素 z 平面上の図 1 のような積分路 $C_1 + C_2 + C_3$ で周回積分することによって、積分値 I を計算せよ。その結果を用いて、$K_{\mathrm{free}}(x, t; x', 0)$ を書き下せ。

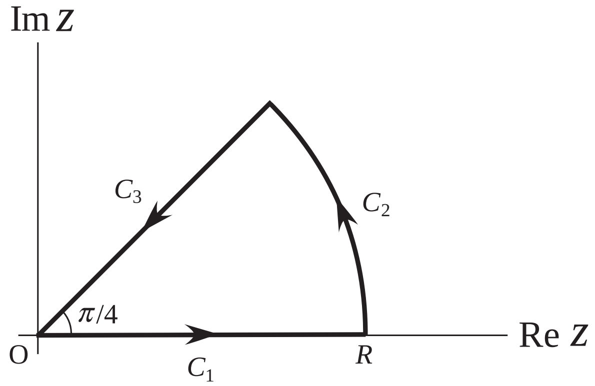

図 1: 複素 z 平面上の積分路

以下では、波数空間で考える。ポテンシャル $V(x)$ が存在する系の波数表示の波動関数 $\tilde{\Psi}(k,t)$ は、

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\Psi}(k,t)=\frac{\hbar^2k^2}{2m}\tilde{\Psi}(k,t)+V\left(i\frac{\partial}{\partial k}\right)\tilde{\Psi}(k,t)$$

に従って時間発展する。ここで、$V(i\partial/\partial k)$ は $V(x)$ の引数 x を微分演算子 $i\partial/\partial k$ で置き換えたものである。

(4) 自由粒子の場合に、初期状態を $\tilde{\Psi}(k,0)$ として時刻 t での波動関数 $\tilde{\Psi}(k,t)$ を計算し、自由粒子の波数表示のプロパゲータ $\tilde{K}_{\mathrm{free}}(k,t;k',0)$ を求めよ。なお、波数表示のプロパゲータ $\tilde{K}(k,t;k',0)$ は、

$$\tilde{\Psi}(k,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{K}(k,t;k',0)\tilde{\Psi}(k',0)dk'$$

を満たす。

(5) ポテンシャルが $V(x)=-Fx$ で与えられる場合の、等加速度運動する粒子を考える。ここで、F は正の定数である。エネルギー固有値 E に属するエネルギー固有関数の波数表示 $\tilde{\psi}_E(k)$ を求めよ。この場合の量子数はエネルギー E である。なお、規格化 $\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\psi}^*_{E'}(k)\tilde{\psi}_E(k)dk=\delta(E-E')$ をおこなって規格化定数も決めること。

(6) 等加速度運動する粒子の波数表示のプロパゲータ $\tilde{K}_{\mathrm{acc}}(k,t;k',0)$ を求めよ。

問題４

図のように、$N(\gg 1)$ 個の要素が、１次元的に連なる鎖について考えよう。各要素は横軸方向に左右の向きを独立にとることができる（図は見やすさのために縦軸方向にずらして描いてある）。各要素の長さは全て a とする。左端から数えて i 番目の要素の向きを変数 s_i で表し、右向きのときには $s_i = 1$ を、左向きのときには $s_i = -1$ をとることとする（図の場合は $s_1 = s_2 = s_3 = 1, s_4 = s_5 = -1$)。図のように鎖の左端を原点にとると、右端の座標は $L = a\sum_{i=1}^{N} s_i$ と書くことができる。この鎖の両端に、張力 $X(\geq 0)$ をかけると、i 番目の要素はエネルギー $\varepsilon_i = -aXs_i$ をもつ。系の温度を T、ボルツマン定数を k として、以下の問いに答えよ。

(1) 分配関数を計算せよ。

(2) ヘルムホルツの自由エネルギー F を計算せよ。

(3) L の期待値 ℓ を計算せよ。また、$\ell \ll Na$ のときに、張力 X と期待値 ℓ の間にフックの法則が成り立つことを示せ。

(4) エントロピー S を計算せよ。

(5) $X \neq 0$ のときに、$\dfrac{kT}{aX}$ の関数として、$\dfrac{S}{Nk}$ の概形を図示せよ。$T \to 0$ と $T \to \infty$ での値は計算して明示すること。

(6) 系を温度 T_1、張力 X_1 に保った (状態 A)。この状態から温度を一定のまま、ゆっくりと張力を $X_2(> X_1)$ まで強くした (状態 B)。さらに断熱的に張力を X_1 まで弱めると温度が T_2 になった (状態 C)。張力が X_1, X_2 それぞれの場合の $\dfrac{S}{Nk}$ を温度 T の関数として一つのグラフに描き、図中に経路 $(A \to B \to C)$ を示せ。

(7) $X = 0$ のときには、この系は熱力学第３法則を満たしているか。理由を付けて答えよ。