

物理学 A

（平成14年8月）

A1 から A4 までのすべての問に解答せよ。解答用紙の問題番号の欄に問題番号を書くこと。

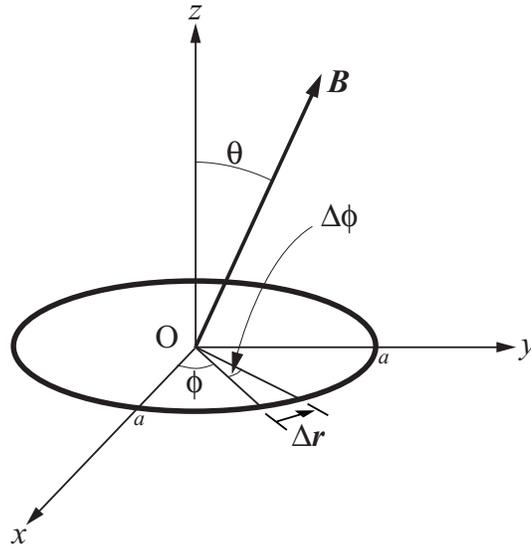
A1 質量 m_1 と m_2 の二つの原子がポテンシャル

$$V(r) = \frac{a}{r^6} - \frac{b}{r^4}$$

で相互作用を及ぼしあっている。 a および b は正の定数であり、 r は二つの原子の間の距離である。二つの原子からなる系の相対運動を古典力学の範囲で考えよう。

- (1) 換算質量 μ はどのような表式になるか。以降の問の解答には μ を使ってよい。
- (2) 二つの原子が上のポテンシャルで分子を作って静止しているときの原子間の相対距離 r_0 と分子のエネルギーを求めよ。
- (3) 分子が回転していないとき、(2) で求めた距離 r_0 の付近での微小振動の運動方程式とその角振動数を求めよ。
- (4) 分子が、二つの原子を結ぶ直線に垂直で質量中心をとる軸のまわりに、相対距離を一定として回転するものとする。回転角を θ として、相対運動の角運動量を表せ。分子が解離せずに（二つの原子が無限に離れないで）束縛状態を保つことのできる角運動量の最大値を求めよ。また、このときの相対距離 r_1 を求めよ。

A2 一様な磁束密度 B の中で、断面積の無視できる細い円環が、中心軸（円環の中心 O を通り、円環の面に垂直な軸）のまわりに一定の大きさの角速度 ω で回転している。回転の方向は、 z 軸正方向から見て反時計回りであるとする。円環上には正の電荷が線密度 ρ で一様に分布している。電荷は円環上に固定されているとして、以下の問に答えよ。ただし円環の半径を a とし、 B の x, y, z 成分は下図の座標系で $B = (0, B_y, B_z)$ であるものとする。



最初、円環の中心軸は z 軸に一致するように固定されているものとする。

- (1) 円環の回転により発生する円電流 i の大きさを求めよ。
- (2) 円環が xy 平面内で回転している時、 x 軸からの角度が ϕ と $\phi + \Delta\phi$ に挟まれた円環の微小部分 Δr に働くローレンツ力の x, y, z 成分を求めよ。ただし電流は i で表すこと。
- (3) 円環に働くローレンツ力により、円環の中心 O の回りに生じるトルク N の x, y, z 成分を求めよ。
- (4) (3) で発生した N は、点 O に置いた磁気双極子モーメント m に働くトルクと同等である。 m の x, y, z 成分を求めよ。次に、円環の中心軸が任意の方向に自由に向くように設定する。このときも常に $m = \gamma J$ の関係が満たされており（ただし γ は定数）、したがって円環の角運動量 J はトルク N と直交しているものとする。
- (5) m は B の作用により周期運動をする。どのような運動かを簡潔に述べ、その周期 T を求めよ。ただし B と z 軸のなす角度を θ とする。

A3 2種類 (A, B) の気体分子が格子点に吸着される問題を考える。各格子点には次の3つの状態が許されるものとする： 0 (気体分子が吸着していない)、1 (A 種分子1つによって占有されている)、2 (B 種分子1つによって占有されている)。各格子点 i 上の自由度として、上記3つの値をとる変数 σ_i ($\sigma_i = 0, 1, 2$) を導入する。占有状態は非占有状態に比べて v ($v > 0$) だけエネルギーが下がるとし、この系のハミルトニアンを

$$\mathcal{H}_N = -v \sum_{i=1}^N [\delta(\sigma_i, 1) + \delta(\sigma_i, 2)] \quad (\text{A})$$

と書く。ただし、 N は格子点数、 $\delta(i, j)$ はクロネッカーデルタである。この格子気体系は温度 T の熱浴中にあるとし、必要に応じて逆温度 $\beta = 1/(k_B T)$ (k_B : ボルツマン定数) を用いてよい。以下の各問に答えよ。

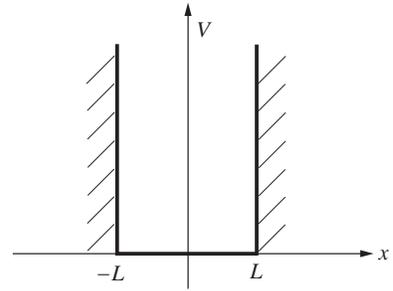
はじめに、分子間相互作用がない場合を考える。

- (1) 自由エネルギー F 、内部エネルギー E の具体的表式を求めよ。
- (2) 比熱の具体的表式を求めよ。また、その温度依存性のおおよその形を描け。
- (3) 気体密度 (1 格子点当たりの占有数期待値) を ρ とする。 ρ の具体的表式、および、その温度依存性のおおよその形を示せ。

次に、同種気体分子間に、距離によらず一定の相互作用ポテンシャルが働く場合を考える。つまり、相互作用定数を J とし、すべての同種気体分子ペアが $-J/N$ のエネルギーをもつとする。この相互作用エネルギーと (A) 式とを加えたものが系の全エネルギーとなる。

- (4) A 種分子で占有された格子点数を N_A 、B 種分子で占有された格子点数を N_B とする。 N_A および N_B を固定した状態空間での、エネルギー E およびエントロピー S の表式を求めよ。
- (5) 分子種密度 $\rho_A \equiv N_A/N$ および $\rho_B \equiv N_B/N$ を導入する。これらの密度を一定に保ったままでの熱力学的極限 $N \rightarrow \infty$ を考える。この極限での 1 格子点当たりの自由エネルギー f を ρ_A 、 ρ_B の関数として求めよ。

A4 下図に示すポテンシャル $V(x) = \begin{cases} 0, & |x| \leq L, \\ \infty, & |x| > L \end{cases}$



の中を1次元的に運動している粒子を量子力学で考える。

(1) まず内部自由度を持たない質量 m の1粒子を考える。

(1-1) 1次元の任意のポテンシャル $U(x)$ の中で運動する場合のシュレディンガー方程式を書き、束縛状態がある場合、それらの状態には縮退がないことを示せ。さらにこのことを用いて、図のポテンシャルの中で運動する粒子を記述する固有関数は、座標の反転のもとで符号を変えるか変えないかのどちらかであることを示せ。

(1-2) 図のポテンシャルの場合にシュレディンガー方程式を解くことにより、規格化された固有関数と固有値を求め、それらと前問の関係について述べよ。

(1-3) 左側のポテンシャルの壁が原点にあったとする。このとき前問で求めた固有関数のうち許されるものを選び出せ。

(2) 図のポテンシャル中をスピン $1/2$ 、質量 m の同一種類のフェルミオンが2つ運動している場合を考える。

(2-1) 2粒子の間に力は働かないとして、それらの状態がスピン3重項状態になっているとき、基底状態の波動関数とエネルギーを求めよ。

(2-2) スピン1重項状態になっているとき、(2-1)と同じ問いに答えよ。

(2-3) 2粒子がポテンシャル $V'(x_1, x_2) = \lambda\delta(x_1 - x_2)$ で相互作用しているとき、前問(2-1), (2-2)のエネルギーが1次の摂動でどう変わるか求めよ。ただし λ は定数である。