大学院前期 (修士) 課程（物理学専攻、宇宙地球科学専攻）入試問題

物 理 学 A

（平成 12 年 8 月）

A1 から A4 までのすべての問に解答せよ。解答用紙の問題番号の欄に問題番号を書くこと。

A1 (力学)

互いに重力を及ぼしあっている質量 M、半径 R の球と質量 m の質点からなる系の運動を考える。重力定数を G とする。球の内部自由度は考えなくてよい。

(1) この系の換算質量 μ はどう表わされるか。

(2) 球の中心と質点との距離を r とし、一平面内の運動のみを考え、極座標 (r, φ) をつかって相対運動のラグランジアンを書け。時間微分は上付きドット「 ˙ 」をつかって表わせ。

(3) ラグランジアンの形から、運動の保存量が二つあることがわかる。それらを G、M、m、μ、座標および座標の時間微分のうち必要なものをつかって表わせ。

(4) 質点と球との散乱を考える。$r \to \infty$ での相対速度の大きさを v_∞、衝突径数を b とする。**(3)** で求めた保存量と v_∞、b との関係に注意して、質点が球に最も近づいたときの距離 r_m を決める式を求めよ。ここでは仮に球の大きさは無視できるとする。

(5) r_m が R より小さいと質点は球の表面に衝突する。$r_m = R$ となるような b の値 b_m とこのような直接衝突の断面積 σ_m を求めよ。

A2 (電磁気学)

(1) マックスウェル方程式のうち、

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \boldsymbol{i}$$

において、

$$\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

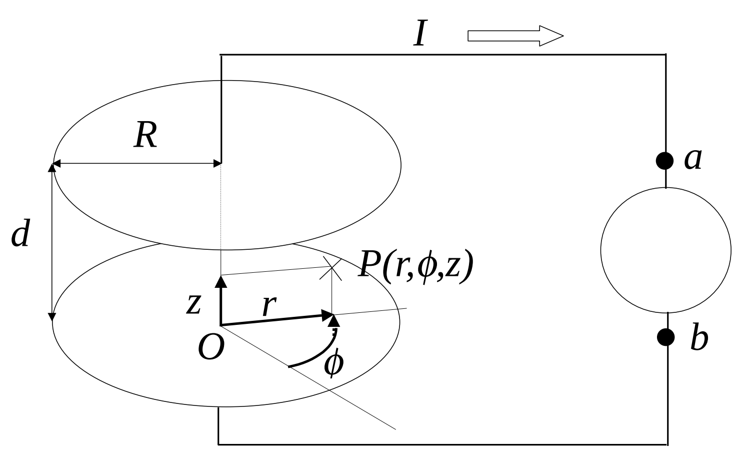
の項があることで電荷の保存則が成立することを示せ。ただし、$\boldsymbol{H}$ は磁場の強さ、$\boldsymbol{D}$ は電束密度、$\boldsymbol{i}$ は電流密度である。

(2) 図のように半径 R の円盤状導体 2 枚を距離 d だけ離して極板とし、コンデンサを構成する。極板間を真空 (誘電率 ϵ_0) に保ったとき、このコンデンサの静電容量 C はいくらか。ただし、コンデンサ内部で電界は一様とする。

(3) このコンデンサに図のように交流電源をつなげ、時刻 t における電圧を $V(t) = V_0 \sin \omega t$ のように変化させる。 V_0 は正で、$V(t)$ は回路上の a 点を基準にした b 点の電位で定義する。電源とコンデンサをつなぐ導線に流れる電流 $I(t)$ を、図の矢印の向きを正にとって記述せよ。

(4) **(3)** の状態において、コンデンサ内部の電束密度 $\boldsymbol{D}(t)$ の大きさ $D(t)$ を求めよ。

(5) コンデンサ内部に極板の中心軸を結ぶ線を対称軸とするような円柱座標系 (r, ϕ, z) を図のようにとる。 **(3)** の状態で、時刻 t においてコンデンサ内部の点 $P(r, \phi, z)$ に生じる磁場 $\boldsymbol{H}$ の各成分 (H_r, H_ϕ, H_z) を求めよ。



A3 (熱・統計力学)

自由に動けるピストンのついたシリンダー容器の中に、1モルの単原子分子からなる理想気体が閉じこめられている。容器の外は真空になっている。最初、気体を絶対温度 T_1、体積 V_1 の状態に保つよう手でピストンを押さえる。この状態を1とする。次に、以下の3通りの相異なる方法で気体を体積 $V_2(V_2 > V_1)$ に膨張させた。

〔方法 A〕 1の状態から、気体の温度を一定に保ったまま、ピストンを手で押さえつつ体積 V_2 までゆっくり膨張させた (等温膨張)。

〔方法 B〕 1の状態から、気体と外部との熱の出入りを断ち、ピストンを手で押さえつつ体積 V_2 までゆっくり膨張させた (断熱膨張)。

〔方法 C〕 1の状態から、気体と外部との熱の出入りを断ち、ピストンを押さえていた手を離した。するとピストンは動き出すが、気体の体積が V_2 になったところで再び手で押さえピストンを固定した (断熱自由膨張)。

理想気体1モルの内部エネルギーは温度のみに依存することを用い、気体定数を R として以下の問いに答えよ。

(1) A の等温膨張過程で、気体がした仕事 ΔW、気体が得た熱量 ΔQ、および気体のエントロピー変化 ΔS はそれぞれいくらか。符号を含めて答えよ。

(2) B の断熱膨張過程で、気体がした仕事 ΔW、気体が得た熱量 ΔQ、および気体のエントロピー変化 ΔS はそれぞれいくらか。符号を含めて答えよ。ただし、単原子分子からなる理想気体の断熱過程においては、圧力 P、体積 V の間に $PV^{5/3} =$ 一定 という関係が成立する。

(3) C の断熱自由膨張過程で、気体がした仕事 ΔW、気体が得た熱量 ΔQ、および気体のエントロピー変化 ΔS はそれぞれいくらか。符号を含めて答えよ。また終状態での気体の絶対温度 T_2 はいくらか。

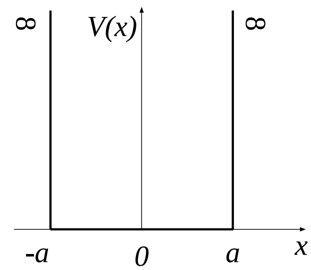
(4) 上記3つの膨張過程 A, B, C のうち、気体を孤立系とみなすことができるのはどれか。また、非可逆な過程はどれか。理由をあげて答えよ。

(5) 熱現象の非可逆性を記述する物理法則として熱力学の第2法則がある。ある過程に際し系が外部から受け取った熱量 ΔQ と系のエントロピー変化 ΔS とを用いた形で、熱力学の第2法則を述べよ。

A4　(量子力学)

　1 次元のポテンシャル $V(x)$ に束縛された質量 m の粒子の状態に関して、以下の問に答えよ。ポテンシャルは以下のように与えられる。

$$V(x) = \begin{cases} \infty & (a \le |x|) \\ 0 & (|x| < a) \end{cases}$$



(1)　定常状態の規格化された波動関数 $\phi_n(x)$ と固有エネルギー E_n を求めよ。

(2)　時刻 t における波動関数 $\psi(x,t)$ を $\phi_n(x)$ で展開して以下のように表す。

$$\psi(x,t) \quad = \quad \sum_n c_n(t)\phi_n(x)$$

$c_n(t)$ の満たす微分方程式を導け。

(3)　基底状態、第一励起状態の波動関数をそれぞれ $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$ とし、時刻 $t=0$ における波動関数が以下で与えられるとする。

$$\psi(x,t=0) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\phi_1(x) + \phi_2(x)]$$

このとき以下の問に答えよ。

(3.1)　任意の時刻における波動関数 $\psi(x,t)$ を求めよ。

(3.2)　$\psi(x,t)$ を用いて位置座標 x およびハミルトニアン H の期待値 $\langle x \rangle$, $\langle H \rangle$ を求めよ。ここで解答は a, m などを用いて表せ。