大学院前期 (修士) 課程（物理学専攻、宇宙地球科学専攻）入試問題

物 理 学 A1

（平成 11 年 9 月）

A1-1 と A1-2 の 2 問題とも解答せよ。解答用紙の問題番号の欄に問題番号を書くこと。

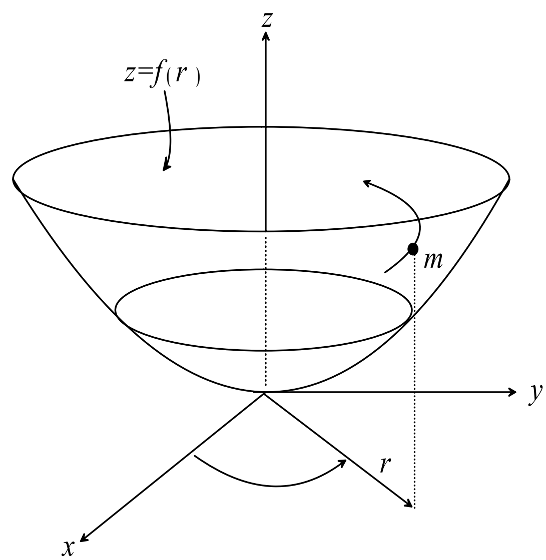
A1-1

重力場中を自由に運動する質量 m の質点のラグランジアンを L_0 とする。L_0 はデカルト座標 (x, y, z) を使うと

$$L_0 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - m\,g\,z$$

で与えられる。ここで $z = 0$ を位置エネルギーの原点とし、重力加速度の絶対値を g とした。

さて, 図のようにこの質点が z 軸回りに回転対称な滑らかな曲面上に拘束されている場合の運動について考察しよう。



(1) $x = r\cos\phi$、$y = r\sin\phi$ によって円柱座標 (r, ϕ, z) を導入する。上で与えた質点が曲面に拘束されていないときのラグランジアン L_0 を、力学変数 (r, ϕ, z) を用いて $L_0 = L_0(r, \dot{r}, \phi, \dot{\phi}, z, \dot{z})$ の形に書き直せ。

(2) 曲面を与える関数を $z = f(r)$ とする．この拘束条件を L_0 に代入して、この系のラグランジアンを力学変数 (r, ϕ) で表せ。

(3) (2) で求めたラグランジアンの持つ対称性から分かるように、この拘束系にはエネルギー E の他に z 軸回りの角運動量 J_z（ϕ の共役運動量）が保存量として存在する。これら保存量の表式を与え、それらを使って r 方向の運動を決定する式（r 方向の運動の第一積分）を導け。

(4) 関数 f が下に凸である（すなわちすべての $r \geq 0$ に対して $f''(r) > 0$ を満たす）時、与えられたゼロでない角運動量 J_z に対して取り得るエネルギーには最小値 E_{min} がある。このエネルギーの最小値 $E = E_{min}$ で決まる運動はどのような軌道を描くか、理由をつけて述べよ。

(5) $f(r) = \dfrac{r^2}{2\ell}$ のとき、$J_z > 0$ としてエネルギーの最小値 E_{min} を g、ℓ、J_z を用いて表せ。

A1-2

以下の問題 (1)、(2) に解答せよ。

(1) 2 次元ポテンシャルが

$$V(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}m\omega^2\left(x^2+y^2\right) & (x>0) \\ +\infty & (x<0) \end{cases}$$

で与えられる場合、この中を運動する質量 m の量子力学的粒子の n 番目 $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ のエネルギー準位を与える表式 とその縮退度を求めよ。答および結論に至る簡単な理由を記すこと。

(2) 同じく質量 m の量子力学的粒子に対し、今度は有限の深さの 1 次元井戸型ポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & (|\,x\,| < a) \\ 0 & (|\,x\,| > a) \end{cases}$$

を考える。ただし $V_0 > 0$ 。エネルギーが負の状態（束縛状態と呼ぶ）は、無次元量 $mV_0a^2/\hbar^2$ の値にかかわらず少なくとも 1 つ存在することを示せ。基底状態のエネルギー準位を、$mV_0a^2/\hbar^2 \ll 1$ の場合に、この微小量に関して最低次の範囲で求めよ。