

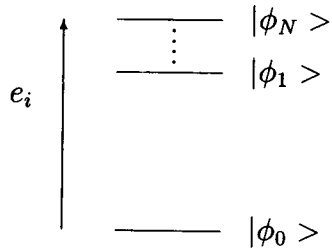
大学院前期 (修士) 課程 (物理学専攻、宇宙地球科学専攻) 入試問題
物理学 B

(平成10年9月)

B1 から B7 までの 7 問の中から 4 問を選択し解答せよ。解答用紙の問題番号の欄に問題番号を書くこと。

B1

図のように基底状態 $|\phi_0\rangle$ 及びほぼ縮退した N 本の励起状態 $|\phi_i\rangle$ ($i = 1, \dots, N$) からなる系を考える。 $|\phi_i\rangle$ はハミルトニアン H_0 のエネルギー e_i の直交規格化された固有関数とする。



$$H_0|\phi_i\rangle = e_i|\phi_i\rangle \quad (e_0 < e_1 \leq \dots \leq e_N)$$

さらに励起状態間に以下の相互作用 V をとり入れる。

$$\langle \phi_i | V | \phi_j \rangle = \begin{cases} v & (i, j = 1, \dots, N) \\ 0 & (i=0 \text{ あるいは } j=0) \end{cases}$$

ここで v は正とする。

(1) $N = 2$, かつ $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle$ が縮退している場合 ($e_1 = e_2 = e$)

(1-1) 励起状態の固有エネルギー、規格化された固有関数を求めよ。

(1-2) 時刻 $t = 0$ において系が $|\phi_1\rangle$ にあったとする。時刻 $t = t_0 (> 0)$ において系が $|\phi_2\rangle$ にある確率を求めよ。

(2) 一般の N の場合

(2-1) 励起状態の固有関数を $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^N c_i |\phi_i\rangle$ 、固有エネルギーを E とする。 c_i, E はそれぞれ次式で与えられることを示せ。

$$c_i = \frac{vM}{E - e_i}, \quad 1 = v \sum_{i=1}^N \frac{1}{E - e_i} \quad \text{ここで } M = \sum_{j=1}^N c_j$$

(2-2) $|\phi_i\rangle$ ($i = 1, \dots, N$) が縮退している場合 ($e_i \rightarrow e$)、励起状態の固有エネルギーを全て求めよ。

(2-3) 基底状態を外場との相互作用 U により励起した時 (2-2) の各励起状態がどのような強さで励起されるか調べよう。ここで相互作用 U の行列要素が以下の様に与えられるとする。

$$\langle \phi_i | U | \phi_0 \rangle = u \quad (i = 1, \dots, N)$$

U について最低次の摂動で各励起状態への遷移行列要素を求めよ。

B2

比熱 (C) は物質のミクロな構造、とくにそのエネルギー・スペクトルを知るための手掛かりとして最も基本的な物理量の一つである。下図 (Figure1) は金属カリウム (Potassium) の低温における比熱の温度 (T) 依存性の実験データである。

$C = \gamma T + AT^3$ の関係がよく成立していることがわかる。金属の比熱の温度依存性について、物理的解釈を以下の設問にしたがって考えてみよう。

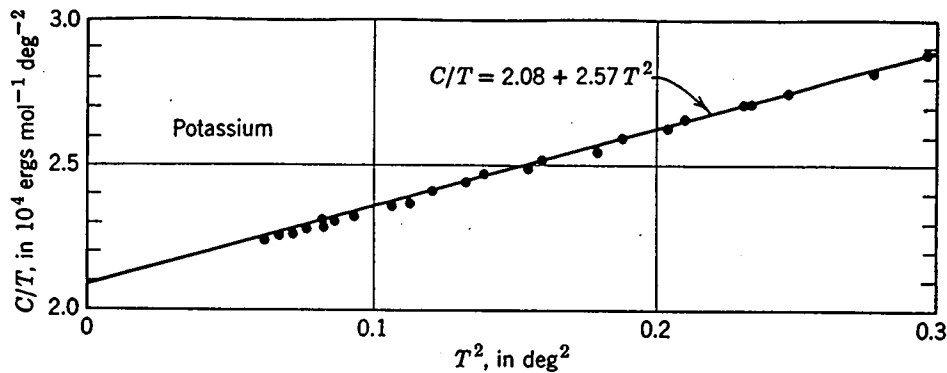


Figure 1: Experimental heat capacity values for potassium, plotted as C/T versus T^2 . [After W. H. Lien and N. E. Phillips, Physical Review 133, A1370 (1964).]

- (1) 低温での比熱のうち T に比例する項は電子比熱である。金属カリウムの電子を理想フェルミ気体とみなして、電子比熱が T に比例することを定性的に示せ。
- (2) 金属カリウムの電子を古典的自由粒子とみなして、エネルギー等分配則から比熱を求めよ。また、電子を古典的自由粒子とみなすと、問 (1) とくらべて、比熱が $1000 \sim 10000$ 倍大きくなる理由を述べよ。【実験で実測される電子比熱は電子を古典的自由粒子とみなした値の 10000 分の一程度である。】
- (3) 比熱の T^3 項は格子振動による比熱 (格子比熱) である。格子比熱が低温で T^3 に比例することを定性的に示せ。
- (4) 金属カリウムの格子比熱は、高温では $3R$ (R は気体定数) と一定の値となる。金属カリウムの格子振動をカリウム原子による調和振動子の集まりとみたと、エネルギー等分配則からこれを計算し、高温と低温において格子比熱の大きさに大きな違いが生じる理由を説明せよ。
- (5) 問 (4) において、カリウム原子の原子核には中性子や陽子が原子番号の数ほど存在するが、これらにはエネルギーが分配されず格子比熱に寄与しないのは何故か? 理由を説明せよ。

B3

波動方程式は物理の様々な分野で基本方程式としてその姿を現わす。まず空間1次元(その座標 x) と時間 t にのみ依存する場合、変位を $u(x, t)$ として

$$(式1) \quad \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0$$

を考察しよう。

- (1) 線密度 ρ の1本のひもが張力 T でもって水平方向(これを x 軸とする)に張られているとする。 x 軸に垂直な微小変位を $u(x, t)$ として、(式1)を導出し v を求めよ。尚、重力の影響は無視する。
- (2) (1)において変形のエネルギーと運動のエネルギーの和は時間に依存しないことを示せ。(やり方は何でもよい。)尚、ひもの長さは l とし、両端は固定されているとする。

次に(式1)の右辺の0を与えられた関数で置き換えた式は1+1次元における電磁場のスカラー及びベクトルポテンシャルが従う式とみなせる。分布が点状かつ瞬間的な場合(その位置を (y, s) とする)

$$(式2) \quad \frac{\partial^2 G(x, t; y, s)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G(x, t; y, s)}{\partial t^2} = -\delta(x - y)\delta(t - s)$$

を考察する。ここで c は光速度。

- (3) (式2)の解のうち $t < s$ で $G = 0$ なるものつまり因果律を満たしているものを求め

よ。必要とあればフーリエ変換及び $\int_0^\infty \frac{\sin \alpha k}{k} dk = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \alpha > 0 \\ 0, & \alpha = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \alpha < 0 \end{cases}$

を用いてよい。

B4 次の3つの測定題目の中から1題を選び解答しなさい。

- I. Po(α 放射体)から放出される α 線(エネルギーが ~ 5 MeV)のエネルギースペクトルをSi半導体検出器で測定する。
- 1) 測定に必要な装置として半導体検出器、電荷増幅器(チャージセンシティブ増幅器)、その他必要な機器をあげ、互いの役割が分かるように模式的に図示し、互いを結線せよ。
 - 2) ここで使う半導体検出器の基本的な構造を模式的に図示して、その動作原理を200字以内で簡潔に説明せよ。また必要な空乏層の厚さを書け。
 - 3) 電荷増幅器の基本的な回路を模式的に図示して、その動作原理と特徴を200字以内で簡潔に説明せよ。
 - 4) 観測されるエネルギースペクトルを図示せよ。
- II. ^{17}F 原子核を核反応 $^{16}\text{O}(d, n)^{17}\text{F}$ で生成した。標的を1 cm厚のプラスチックで囲んでおき、 ^{17}F から放出される陽電子(陽電子の最大運動エネルギー $= 1.6$ MeV)をこのプラスチックに全て止めてしまうことにする。ここで、重陽子ビームを止めてからも標的とこのプラスチックから0.511 MeVの γ 線が出てくると、この ^{17}F の β 崩壊寿命がほぼ100秒であることも分かっている。
- 1) この0.511 MeVの γ 線はどのような過程で出てくるか。
 - 2) この0.511 MeVの γ 線のエネルギースペクトルを測るために必要な装置としてNaI(Tl)結晶(直径5 cm \times 厚さ5 cm)、光電子増倍管、直流高電圧発生装置(最高電圧3 kV)、増幅器、多重波高分析器(マルチチャネルアナライザ)その他必要な機器をあげ、それぞれを模式的に表して、互いを結線せよ。それぞれの役割の概要を書け。
 - 3) 光電子増倍管の構造(原理)を模式的に図示して、各電極と光電面(photo cathode)へ高電圧を分配して、パルス信号を取り出す電気回路を模式的に示せ。この動作原理を200字以内で簡潔に説明せよ。
 - 4) この0.511 MeVの γ 線がNaI(Tl)結晶のなかで起こす相互作用をあげ、相互作用の後引き続きどのような現象が起こるか、あり得る可能性を簡潔に書け。
次に観測されるエネルギースペクトルを図示し、その特徴を述べよ。
 - 5) ^{17}F の β 崩壊寿命を確認(有効数字3桁以上測定)するための実験を計画し、必要な装置を模式的に配置して、互いを結線せよ。次にどのようなスペクトルを取るか述べよ。但し、必要なエネルギーを持つ重陽子ビームはバンデグラーフ加速器から得られるとする。
- III. C型電磁石があり、直径0.200 mの2磁極が、磁極面(互いに平行)の間隔が0.0500 mの距離を隔てて置いてある。間隙の中心近傍($2 \times 2 \times 2$ cm³)に一樣な静磁場 ~ 5 kOeが得られている。この磁場を有効数字5桁の精度で測定したい。次の問に答えよ。但し、C型電磁石のリターンヨークは十分に大きく、コイルの全巻き数は 1.00×10^3 である、又、 $1 \text{ A m}^{-1} = 4\pi \times 10^{-3} \text{ Oe}$ である。
- 1) コイルは直列に結線し電源に繋いである。このときのコイルの全抵抗は 10.0Ω である。直流電源の能力はどのようなものか。
 - 2) この磁場を測定するために必要な装置をあげよ。その測定原理と方法を示すために、装置の機能が分かるように主な部品を模式的に描き、それぞれを結線せよ。
 - 3) 前問2)で示した装置の測定原理と、測定方法を400字以内で簡潔に書け。

B5

ある朝、A君が大学にいくと机の上に色のついたガラス状の物質がおいてあるのに気がついた。きっとこの物質の性質を調べよと先生がいわれているのだろうと思い、A君はいろいろと考え始めた。これからA君と一緒に考えてみよう。

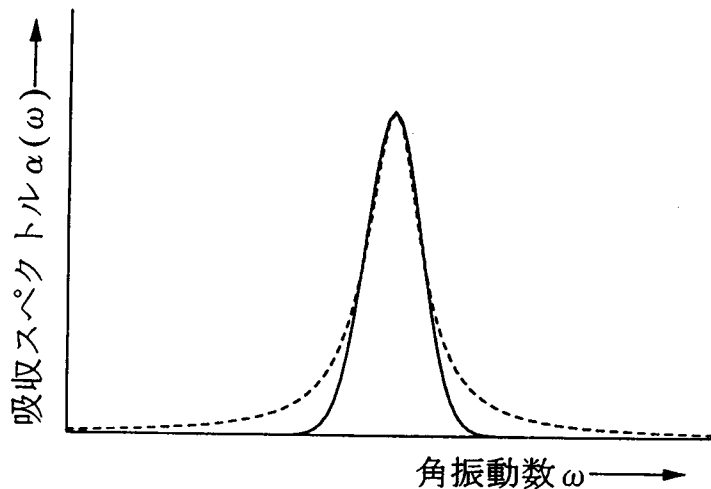
(1) この物質は、金属、半導体、絶縁体のどれにあたるだろうか。それを確かめる簡単な測定法について述べよ。

(2) A君はこの物体に色がついているところから、白熱電球を用いて光の吸収スペクトルを測定してみようと考えた。ただし、物質を透過する光の強度は入射光の角振動数 ω 、試料の厚さ z に対して、 $I(\omega) = I_0(\omega) \exp[-\alpha(\omega)z]$ のように表され、 $\alpha(\omega)$ を吸収係数（吸収スペクトル）と呼んでいる。ここで、 $I_0(\omega)$ はそれぞれ入射光の強度である。A君はいろいろな波長での吸収係数を測定し、それから吸収スペクトルを求めようとした。どのような手順で行えばよいか。実験装置の図や試料の取り扱い方などを含め、測定や解析の手順を箇条書きにして述べよ。

(3) A君は吸収スペクトルの物理的な意味を考えようと思い、参考書で調べてみた。その結果、吸収スペクトルのモデルとしてローレンツモデルがあることが分かった。ローレンツモデルは、原子中の電子が核とバネによって結びついているというモデルで、その運動は次のような運動方程式により表される。

$$m(\ddot{X}(t) + \Gamma\dot{X}(t) + \omega_0^2 X(t)) = qE(t)$$

ここで、 $E(t) = E_0 e^{-i\omega t}$ は光の振動電場（角振動数 ω ）、 $X(t)$ は電子の平衡位置からのずれ、 m と q は電子の質量と電荷である。 Γ と ω_0 の物理的な意味を考えてみよう。



(4) 単位体積あたり N 個の原子からなる系の光の吸収スペクトルをローレンツモデルを用いて導き出そう。

(4-1) この系の誘電率 $\epsilon(\omega) = \epsilon_0 + \epsilon_1(\omega)$ を求めよ。ここで、 ϵ_0 と $\epsilon_1(\omega)$ はそれぞれ真空の誘電率、ローレンツモデルの原子の寄与による誘電率を表す。

(4-2) 原子の密度が充分希薄であり、 $(\epsilon(\omega)/\epsilon_0)^{1/2} \approx 1 + \epsilon_1(\omega)/(2\epsilon_0)$ という近似が使えるとして、吸収スペクトル $\alpha(\omega)$ を導き出せ。

(5) 前ページの図の実線は A 君が実測した吸収スペクトルである。破線は A 君がローレンツモデルにより計算した吸収スペクトルを示す。計算結果は、図に示すように実際のスペクトルとかなりずれていることが分かった。このずれは実測のスペクトルがガウス関数の形になっていることに原因がある。この理由について考察してみよ。

B6

(1) 半径 r 、質量 m の微惑星を無限に分布する塵から集めた時の重力エネルギーを求めよ。

(2) 太陽（質量 M_s ）から a だけ離れたところで、微惑星のもとになる密度 ρ 、半径 r の気体球が収縮することを考える。気体球の自己重力が潮汐力に打ち勝った時、収縮できるとして、その気体球の密度の下限（Roche 密度）を求めよ。

(3) 以下の用語を簡単に（各 2、3 行ずつ程度）説明せよ。

(a) コンドライト

(b) 宇宙の大規模構造

(c) 隕石の岩石学タイプ

(d) 星のチャンドラセカー質量

(e) 元素の宇宙存在度

B7

(1)

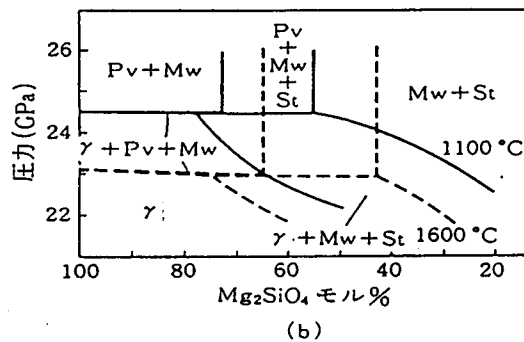
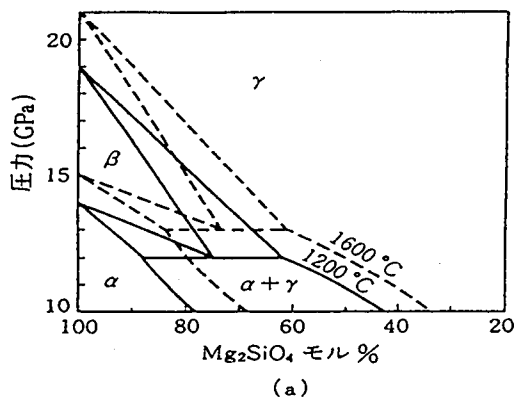
a図は Mg_2SiO_4 - Fe_2SiO_4 系オリビン-変形スピネル-スピネル転移の、b図はポストスピネル転移の相平衡図である。a図では1200℃と1600℃の相境界が示されている。b図では1100℃と1600℃の相境界が示されている。それぞれ、 α :オリビン、 β :変形スピネル、 γ :スピネル、Pv:ケイ酸塩ペロブスカイト、Mw:マグネシオウスタイト、St:スティショバイト、を表している。 Mg_2SiO_4 端成分では圧力上昇過程において温度1600℃では、 $\alpha \rightarrow \alpha + \beta$ (15GPa) $\rightarrow \beta \rightarrow \beta + \gamma$ (21GPa) $\rightarrow \gamma \rightarrow \gamma + Pv + Mw$ (23.1GPa) $\rightarrow Pv + Mw$ へと相が変化していく。

(1-1-1) a図で Mg_2SiO_4 モル%=85の組成をもつ固溶体の、温度1200℃での圧力上昇に伴う相の変化を示せ。3相が共存する点に注意せよ。

(1-1-2) また、12.5GPaでの α 相と β 相の組成(Mg_2SiO_4 モル%)を示し、てこの原理(レバールール)に基づき、それぞれの量比を読みとれ。

(1-2) a図とb図に基づいて、 Mg_2SiO_4 モル%=90の組成をもつ固溶体の、横軸に温度(1000~1700℃)、縦軸に圧力(10~26GPa)をとった相平衡図を表せ。

(1-3) a図、b図および(1-2)で作成した相平衡図が、地球のマントルの層構造や、温度構造、構成鉱物の化学組成、プレート運動の原動力などについて、いかなる示唆を与えてくれか、300字以内で論ぜよ。



(2)

X線には連続X線と特性X線がある。つぎの3つの分析・測定法のうち、2つを選択し、Braggの反射の条件式を用いて原理を説明せよ。

- EPMA分析法。
- 特性X線を用いた角度分散回折測定法。
- 連続X線を用いたエネルギー分散回折測定法。