大学院前期 (修士) 課程 (物理学専攻、宇宙地球科学専攻) 入試問題
物理学 A1
(平成１０年９月)

A1-1 と **A1-2** の２問題とも解答せよ。解答用紙の問題番号の欄に問題番号を書くこと。

A1-1

一様な太さの木材で作られた、長さ ℓ、質量 M の細い棒がある。いまその一端を天井（てんじょう）の一点 O につるしておく。ただし、棒は O を中心に自由に揺れ動くことが出来るとする（下図)。

いま、つるした棒を垂直に静止させておいて、左から質量 m の弾丸を速さ V_0 で水平に撃ちこんだところ、弾丸は棒の中央につき刺さり、棒は左右に揺れ始めた。この場合、つぎの各問いに答えよ。

(1) この棒の、端点 O のまわりの慣性能率（モーメント）I を求めよ。

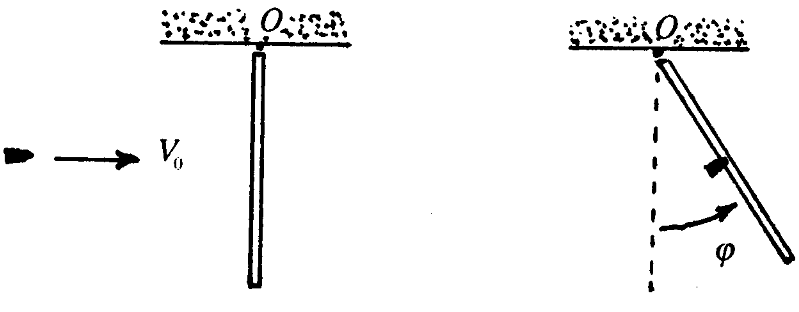
(2) 弾丸がつき刺さった状態の棒の、O のまわりの慣性能率 I' はいくらか。

(3) 弾丸がつき刺さる直前と直後で保存する力学量は次のうちどれか。また、保存しない量があればその理由を書け。

(a) 運動量の水平成分 (b)O のまわりの角運動量 (c) エネルギー

(4) 弾丸がつき刺さったあと、棒の揺れの垂直線に対する最大角度 φ を測ったとする。この角度 φ から弾丸の水平速度 V_0 を求める式を書け。

ただし、重力の加速度は g とする。また、点 O における摩擦および空気抵抗は無視できるものとする。



A1-2

質量 m の粒子（質点）の量子力学に関して，以下の各問に答えよ．ただし，空間は１次元であるとし，粒子の座標演算子を $\hat{x}$，運動量演算子を $\hat{p}$ とする．また，この粒子の量子力学的状態空間には少なくとも１つの離散的正規直交完全系 $\{|\nu\rangle\}$ $(\nu = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ が存在しているものとする．$\hbar =$ プランク定数$/2\pi$ とする．

(1) ある関数 $f(x)$ は，すべての x の値（実数）に対して $f(x) \geq 0$ を満たすものとする．このとき，任意の状態ベクトル $|\psi\rangle$ に対して

$$\langle\psi|f(\hat{x})|\psi\rangle \geq 0$$

が成立することを示せ．

(2) ある系のハミルトニアン演算子 $\hat{H}_0$ が離散的な固有値 $\{E_n\}$ および，規格化された固有状態 $\{|\psi_n\rangle\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ をもっている．ただし，固有値には縮退（縮重）がないものとし $E_0 < E_1 < E_2 < \cdots$ のように，小さい方から順に番号づけされているものとする．この系に，ある関数形 $V(x)$ をもつポテンシャルを強さ λ（実数）で加えた場合，新しいハミルトニアン演算子は

$$\hat{H}(\lambda) = \hat{H}_0 + \lambda V(\hat{x})$$

で与えられる．簡単のため $\hat{H}(\lambda)$ の固有値は，任意の λ の値に対して縮退しないとする．各エネルギー固有値および規格化された固有状態は λ の滑らかな関数となり，これらを $E_n = E_n(\lambda)$, $|\psi_n\rangle = |\psi_n(\lambda)\rangle$ $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ と表すことにする．このとき関係式

$$\frac{\mathrm{d}E_n(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} = \langle\psi_n(\lambda)|V(\hat{x})|\psi_n(\lambda)\rangle$$

が成立することを示せ．

(3) 非調和項 $g\hat{x}^4$ $(g > 0)$ を含む振動子のハミルトニアン

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 + g\hat{x}^4$$

の基底エネルギー準位は，非調和項を含まない場合（$g = 0$ の場合）に比べて低くなるか高くなるか，理由を付して述べよ．

(4) 演算子 $\hat{A}$ は必ずしもエルミートとは限らないとする．このとき，任意の状態ベクトル $|\psi\rangle$ に対して

$$\langle\psi|\hat{A}^\dagger\hat{A}|\psi\rangle \geq 0$$

が成立することを証明せよ．また，等号が成立するのは $\hat{A}|\psi\rangle = 0$ の場合に限ることを示せ．

(5) 任意の実関数 $f(x)$ に対して，それに付随したポテンシャル $V(x)$ を

$$V(x) = \frac{1}{2m}\left[f(x)^2 - \hbar\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right]$$

と定義する．このとき，ハミルトニアン

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$$

が，ある演算子 $\hat{A}$ を用いて $\hat{H} = \hat{A}^\dagger\hat{A}$ の形となることを示せ（$\hat{A}$ の具体形をもとめよ）．

(6) 関数 $f(x) = \alpha x + gx^3$ $(\alpha, g > 0)$ に対して，前問 (5) の意味での付随したポテンシャル $V(x)$ を考える．この場合に，ハミルトニアンの基底状態波動関数 $\psi_0(x)$（座標表示）の関数形を決定せよ．ただし，波動関数の規格化はしなくてよい．