大学院前期 (修士) 課程 (物理学専攻、宇宙地球科学専攻) 入試問題
物理学 A1
(平成９年９月)

A1-1 と A1-2 の２問題とも解答せよ。解答用紙の問題番号の欄に問題番号を書くこと。

A1-1

以下の問に答えよ。

(1) 原点からベクトル $\boldsymbol{r}$のところに位置する質量 m の粒子に中心力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = f(r)\boldsymbol{e}_r$が働いているとする。ただし、$\boldsymbol{e}_r$は$\boldsymbol{r}$方向の単位ベクトルであり、$r$ はベクトル $\boldsymbol{r}$の大きさである。このとき、粒子の角運動量ベクトルを書き下し、それが保存されることを示せ。

(2) ２次元平面上で中心力ポテンシャル $U(r)$ を受けて運動している質量 m の粒子のラグランジアン Lは、次の様に与えられる。

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r)$$

ここで、(r, φ) は粒子の位置の極座標であり、$\dot{r}, \dot{\varphi}$ は各々、r, φ の時間微分を示す。このとき、循環（サイクリックな）座標に対するラグランジュの運動方程式を書き下すことにより、角運動量が保存されることを示せ。

(3) (2) の場合で、粒子の全エネルギー Eを書き下せ。ただし、保存される角運動量の大きさを Jとして、r のみの関数として書くこと。

(4) (2) において、中心力ポテンシャル $U(r)$ が、$U(r) = kr^2$（kは定数）で与えられ、この粒子が全エネルギー Eと角運動量 Jを持っているとする。この粒子が運動することが可能な r の領域を、以下の (a), (b) の場合に分けて、各々求めよ。(3) で求めた結果を用いてもよい。

(a) $k > 0$ の場合

(b) $k < 0$ の場合

A1-2

質量 m の粒子の1次元運動を量子力学的に扱う．粒子の位置座標を x とし，$V(x)$ を原点 $x=0$ 近傍でのみ有限の大きさをもつ斥力ポテンシャルとする．以下の各問に解答せよ．

(1) 左方遠方（$x \to -\infty$）から入射した粒子が，このポテンシャルによって散乱・透過する現象を記述する波動関数（定常状態）を $\psi(x)$ とし，入射波の波数を k とすると，$\psi(x)$ は $x \to \pm\infty$ で

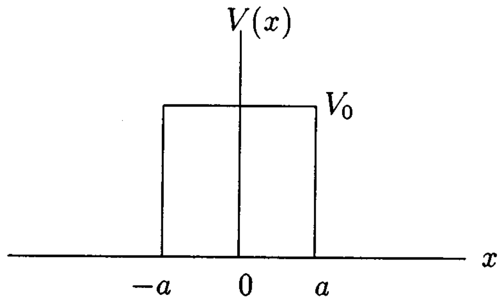
$$\psi(x) \sim \begin{cases} Ae^{ikx} + r(k)Ae^{-ikx} & (x \to -\infty) \\ t(k)Ae^{ikx} & (x \to +\infty) \end{cases} \qquad \text{(A)}$$

のようにふるまう．ここで，A は規格化定数，$r(k)$ は反射係数，$t(k)$ は透過係数である．

(1-1) 矩形ポテンシャル（$a>0, V_0>0$）

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (|x|>a) \\ V_0 & (|x| \le a) \end{cases}$$

の場合について，$r(k)$,$t(k)$ を決める条件式を書け．（$V_0 > (\hbar k)^2/(2m)$ と仮定する．また，$r(k), t(k)$ の具体形までは求める必要はない．）



(1-2) 領域 $-a<x<a$ における波動関数の関数形を $f(x)$ とする．また，この領域の両端での関数値 $f_\pm$ および微分係数 $f'_\pm$ を

$$f_- = \lim_{x\to -a+0} f(x), \qquad f'_- = \lim_{x\to -a+0} f'(x),$$
$$f_+ = \lim_{x\to a-0} f(x), \qquad f'_+ = \lim_{x\to a-0} f'(x),$$

と定義する．$\kappa = \sqrt{(2mV_0/\hbar^2)-k^2}$ とおくとき

$$\frac{f'_+ - f'_-}{f_+ + f_-} = \kappa \tanh \kappa a$$

の関係が成立することを示せ．

(1-3) $V_0 = c/(2a)$ $(c>0)$ として $a \to +0$ の極限をとると，$V(x) \to c\delta(x)$ ($\delta(x)$ はディラックのデルタ関数) となる．この極限で $r(k), t(k)$ の具体形を求めよ．

(2) 次に，$x=0$ 近傍でのみ有限の値をもち，かつ空間反転対称性（$V(x)=V(-x)$）のある一般の斥力ポテンシャルの場合を考える．何らかの理由により $x\to\infty$ での $\psi(x)$ の漸近形が，左向き進行波も含んでいるとする：

$$\psi(x) \sim \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & (x \to -\infty) \\ Ce^{ikx} + De^{-ikx} & (x \to +\infty) \end{cases}$$

(2-1) $|A|^2, |B|^2, |C|^2, |D|^2$ は，ある簡単な条件式を満たす．それはどんなものか．

(2-2) 一般に (C,D) と (A,B) の間には，ある行列 M を用いた線形関係

$$\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

がある．行列 M の各成分を問題(1)の(A)式における $r(k), t(k)$ を用いて表せ．（ヒント：(A)式における $\psi(x)$ に関して，その空間反転 $\psi(-x)$ を考察せよ．また，重ね合わせの原理も考慮せよ）．